1. Линейное пространство над произвольным полем. Ранг и база системы векторов.

Пусть дано поле P. Непустое мн–во V называется ***линейным*** или ***векторным пространством над полем P***, если на этом мн–ве определены внутренний $V \times V \to V$ (сложение) и внешний $P \times V \to V$ (умножение на число из P) законы композиции, удовлетворяющие аксиомам: $\forall a, b, c \in V$ и $\alpha, \beta \in P$

1. $a + b = b + a$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. $\exists \theta \in V: a + \theta = \theta + a = a$
4. для $\forall a \in V \ \ \exists -a \in V: a + (-a) = (-a) + a = \theta$
5. $1 \cdot a = a$
6. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$
7. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
8. $a(a + b) = \alpha a + \alpha b$

Линейное пр–во над полем $\mathbb{R}$ – ***вещественное линейное пр–во***, над полем $\mathbb{C}$ – ***комплексное***.
Рассмотрим конечные системы $a_1, \dots, a_n$ векторов.
Линейно независимая подсистема системы векторов, через которую линейно выражается ∀ вектор системы, называется ***базой*** этой ***системы векторов***.

T1. *Подсистема системы векторов является базой системы векторов ⇔ образует максимальную линейно независимую подсистему.*
Док–во. Необх–сть. Пусть в системе векторов $a_1,\dots,a_r,\dots a_n$ подсистема $a_1,\dots,a_r$ образует базу => ∀ бóльшая подсистема будет линейно зависимой по Т (*), т.к. ∀ ее вектор линейно выражается через базу $a_1,\dots,a_r$ => база образует максимальную линейно независимую подсистему.
Дост–сть. Пусть $a_1,\dots,a_r$ – максимальная линейно независимая подсистема системы $a_1,\dots,a_r,\dots a_n$ => для $\forall a_i, i=\overline{1,k}$, подсистема $a_1,\dots,a_r, a_i$ – линейно зависима (если $i < r$, то как подсистема, содержащая 2 одинаковых вектора; если $i > r$, то как подсистема из r+1 > r векторов). По Т (**) a_i – линейно выражается через $a_1,\dots,a_r$ => $a_1,\dots,a_r$ – база. •

***С*1**. *Все базы одной системы векторов состоят из одинакового числа векторов, равного максимальному числу линейно независимых векторов системы.*
Число векторов базы называется ***рангом системы векторов***: $rg\,(a_1,\dots,a_n)$ = максимальному числу линейно независимых векторов системы.
2 системы векторов линейного пр–ва называются ***эквивалентными***, если каждая из этих систем выражается через другую => *база системы векторов эквивалентна самой системе.*

Т2. *Если система $a_1,\dots,a_k$ линейно выражается через $b_1,\dots,b_m$, то $rg\,(a_1,\dots,a_k) < rg\,(b_1,\dots,b_m)$.*
Док–во. Пусть $a_1,\dots,a_r$ и $b_1,\dots,b_s$, – базы. Из условия теоремы и транзитивности свойства "линейной выражаемости" => база $a_1,\dots,a_r$ 1–й системы линейно выражается через базу $b_1,\dots,b_s$ 2–й => r < s, т.к. иначе, если r > s, система $a_1,\dots,a_r$ была бы линейно зависимой по Т (*). •

***С*2**. *Ранги эквивалентных систем совпадают.*
***С*3**. *Эквивалентные линейно независимые системы векторов состоят из одинакового числа векторов.*

Система векторов $e_1,\dots, e_n$ линейного пр–ва V ***порож–дает пр–во*** V, если $\forall x \in V$ является линейной комби–нацией $e_1,\dots, e_n$. Упорядоченная система векторов $e_1,\dots,e_n$ линейного пр–ва V называется ***базисом*** V, если она линейно независима и порождает V.

Т1. ∀ *2 базиса линейного пр–ва состоят из одинакового числа векторов.* (=> из эквивалентности двух базисов линейного пр–ва и С2).
Число векторов базиса не зависит от самого базиса и однозначно определяется самим пр–вом (Т *).
Число векторов базиса линейного пр–ва V – ***размерность пространства*** V : dim V. Размерность 0–го пр–ва по определению = 0. Из Т*** => dim V = максимальному числу линейно независимых векторов этого пр–ва. Линейное пр–во размерности n, $n \in \mathbb{N}$, называется *n–мерным*. 0–е пространство и n–мерные пр–ва называются ***конечномерными***. Линейное пр–во называется ***бесконечномерным***, если для $\forall k \in \mathbb{N}$ в пр–ве $\exists\, k$ линейно независимых векторов. Пример: пр–во M_∞ многочленов всех степеней.

Т2 (о неполном базисе). *В n–мерном пр–ве ∀ линейно независимую систему из k, где k < n, векторов можно дополнить до базиса.*
Док–во. $e_1 \dots, e_n$ – линейно независимая система векторов пр–ва V. Т.к. $k < n$ => в силу Т*** система $e_1, \dots, e_k$ не является базисом V => не порождает всего пр–ва V. Пусть вектор $e_{k+1} \in V$ не является линейной комбинацией $e_1, \dots, e_k$ => система векторов $e_1,\dots,e_k, e_{k+1}$ линейно независима (в силу Т**). Если $k+1= n$, то эта система векторов образует базис V, если же $k+1 < n$, то ан–но построим линейно независимую систему из $k + 2$ векторов. За $n – k$ таких шагов мы построим искомый базис $e_1 \dots,e_k,\dots,e_n$. •

Коэффициенты разложения вектора по базису называются ***координатами вектора в этом базисе***.
Пусть $e = (e_1, \dots,e_n)$ и $f = (f_1,\dots, f_n)$ – 2 базиса n–мерного пр–ва V. Векторы 2–го базиса, как векторы пр–ва V, разлагаются по базису e:

$$f_1 = c_{11}e_1 + \ldots + c_{n1}e_n$$
$$\dots$$
$$f_n = c_{1n}e_1 + \ldots + c_{nn}e_n$$

Коэффициенты c_{ij} этих разложений образуют матрицу $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ***перехода от базиса e к базису f***.
1°. *Разложение вектора по базису единственно.*
2°. *Координаты вектора обладают линейностью.*
3°. *При переходе от базиса e к базису $f = eC$ координаты вектора x изменяются : $x_e = C\,x_f$*

---

*: *Если в линейном пр–ве бóльшая система векторов линейно выражается через меньшую, то бóльшая система линейно зависима*
**: *Если система $a_1,\dots, a_n$ линейно независима, а система $a_1,\dots, a_n$,b линейно зависима, то вектор b линейно выражается через векторы $a_1,\dots, a_n$*
***: *Система векторов $e_1,\dots,e_n$ линейного пр–ва является его базисом ⇔ она образует максимальную линейно независимую систему векторов этого пр–ва*

2. **Изоморфизм линейных пространств**

Система векторов $e_1,\dots, e_n$ линейного пр–ва V ***порож–дает пр–во*** V, если $\forall x \in V$ является линейной комби–нацией $e_1,\dots, e_n$. Упорядоченная система векторов $e_1,\dots,e_n$ линейного пр–ва V называется ***базисом*** V, если она линейно независима и порождает V.

Т1. ∀ *2 базиса линейного пр–ва состоят из одинако–вого числа векторов.* (=> из эквивалентности двух базисов линейного пр–ва и следствия (*Ранги эквивалентных систем совпадают*)).
Число векторов базиса не зависит от самого базиса и однозначно определяется самим пр–вом (Т *).
Число векторов базиса линейного пр–ва V – ***размерность пространства*** V : dim V. Размерность 0–го пр–ва по определению = 0. Из Т* => размерность линейного пр–ва = максимальному числу линейно независимых векторов этого пр–ва. Линейное пр–во размерности n, $n \in \mathbb{N}$, называется *n–мерным*. 0–е пространство и n–мерные пр–ва называются ***конечномерными***. Линейное пр–во называется ***бесконечномерным***, если для $\forall k \in \mathbb{N}$ в пр–ве $\exists\, k$ линейно независимых векторов. Пример: пр–во M_∞ многочленов всех степеней.

Т2 (о неполном базисе). *В n–мерном пр–ве ∀ линейно независимую систему из k, где k < n, векторов можно дополнить до базиса.*
Док–во. $e_1 \dots, e_n$ – линейно независимая система векторов пр–ва V. Т.к. $k < n$ => в силу Т* система $e_1, \dots, e_k$ не является базисом V => не порождает всего пр–ва V. Пусть вектор $e_{k+1} \in V$ не является линейной комбинацией $e_1, \dots, e_k$ => система векторов $e_1,\dots,e_k, e_{k+1}$ линейно независима (в силу Т**). Если $k+1= n$, то эта система векторов образует базис V, если же $k+1 < n$, то ан–но построим линейно независимую систему из $k + 2$ векторов. За $n – k$ таких шагов мы построим искомый базис $e_1 \dots,e_k,\dots,e_n$. •

Коэффициенты разложения вектора по базису называются ***координатами вектора в этом базисе***.
Пусть $e = (e_1, \dots,e_n)$ и $f = (f_1,\dots, f_n)$ – 2 базиса n–мерного пр–ва V. Векторы 2–го базиса, как векторы пр–ва V, разлагаются по базису e:

$$f_1 = c_{11}e_1 + \ldots + c_{n1}e_n$$
$$\dots$$
$$f_n = c_{1n}e_1 + \ldots + c_{nn}e_n$$

Коэффициенты c_{ij} этих разложений образуют матрицу $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ***перехода от базиса e к базису f***.
1°. *Разложение вектора по базису единственно.*
2°. *Координаты вектора обладают свойством линейности.*
3°. *При переходе от базиса e к базису $f = eC$ координаты вектора x изменяются : $x_e = C\,x_f$*

2 линейных пр–ва V_1 и V_2 над общим полем P называ–ются ***изоморфными*** ($V_1 \cong V_2$), если ∃ биективное отображение $\varphi: V_1 \to V_2$, которое сохраняет законы композиции, т.е. если для $\forall x, y \in V_1$ и ∀ числа $\alpha \in P$
1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ 2) $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$.
Само отображение φ называется ***изоморфизмом линейных пространств***. Св–ва изоморфных пр–тв:
1°. *Отношение изоморфизма – отношение эквива–лентности на мн–ве всех линейных пр–тв над P.*
2°. *В изоморфных пр–вах*
а) образ (и прообраз) линейной комбинации векторов есть линейная комбинация образов (прообразов) с теми же коэффициентами;
б) образ (и прообраз) 0–го вектора есть 0–й вектор;
в) образ (и прообраз) линейно независимой системы векторов образует линейно независимую систему;
г) образ (и прообраз) базиса есть базис.
Док–ва этих свойств опираются на определение и элементарные св–ва объектов.

Т(критерий изоморфизма). *2 линейных пр–ва над общим полем изоморфны ⇔ их размерности равны.*
Док–во. Необх–сть => из св–ва *"г"* изоморфных пр–тв.
Дост–сть. Пусть V_1 и V_2 – линейные пр–ва над полем P и dim V_1 = dim V_2 = n. Пусть $e_1, \dots,e_n$ – базис V_1 , $f_1,\dots, f_n$ – базис V_2 . Построим отображение $\varphi: V_1 \to V_2$, : $\forall x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in V_1 \to y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \in V_2$ (т.е. вектор y имеет те же координаты, что и x). Из единственности разложения вектора по базису => отображение φ биективно. И φ – изоморфизм, т.к. координаты вектора обладают одним св–вом линейности.
С. *∀ n–мерное вещественное пр–во изоморфно арифметическому пр–ву $\mathbb{R}^n$*, а *любое n–мерное комплексное пр–во – арифметическому пр–ву $\mathbb{C}^n$*.

---

*: *Система векторов $e_1,\dots,e_n$ линейного пр–ва является его базисом ⇔ она образует максимальную линейно независимую систему векторов этого пр–ва*
**: *Если система векторов $a_1,\dots, a_n$ линейно независима, а система $a_1,\dots, a_n$,b линейно зависима, то вектор b линейно выражается через векторы $a_1,\dots, a_n$*

3. Сумма и пересечение линейных пространств.

Подмножество L линейного пр–ва V над полем P называется ***линейным подпространством*** пр–ва V , если оно является линейным пр–вом относительно законов композиции в V .
Пусть $a_1, \dots, a_k$ – система векторов линейного пр–ва V над полем P. ***Линейной оболочкой*** $\mathcal{L}\,(a_1, \dots, a_k)$ *системы векторов* $a_1, \dots, a_k$ называется мн–во всевозможных линейных комбинаций этих векторов:
$\mathcal{L}\,(a_1, \dots, a_k) = \{\, a = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i \mid \alpha_i \in P, i = \overline{1,k} \,\}$
=> ∀ конечномерное пр–во является линейной оболочкой векторов своего базиса.

Т1. *Если $a_1, \dots, a_k$ – векторы линейного пр–ва V, то $\mathcal{L}\,(a_1, \dots, a_k)$ является линейным подпространством пр–ва V.* (Вытекает из Т*, т.к для линейной оболочки $\mathcal{L}\,(a_1, \dots, a_k)$ обе импликации имеют место.)
Линейная оболочка $\mathcal{L}\,(a_1, \dots, a_k)$ – это линейное подпространство, порождаемое векторами $a_1, \dots, a_k$.
2 системы векторов линейного пр–ва ***эквивалентны***, если каждая из этих систем выражается через другую.

Т2. *2 системы векторов линейного пр–ва эквивалентны ⇔ их линейные оболочки совпадают.*
Док–во. Необх–сть. Пусть системы $a_1, \dots, a_k$ и $b_1, \dots, b_m$ эквивалентны => $\mathcal{L}\,(a_1, \dots, a_k) = \mathcal{L}\,(b_1, \dots, b_m)$, т.к. для этих множеств имеет место двустороннее вложение. *Дост–сть* очевидна.
***С*1**. *Линейная оболочка системы векторов совпадает с линейной оболочкой своей базы.*
***С*2**. dim $\mathcal{L}\,(a_1, \dots, a_k)$ = rg $(a_1, \dots, a_k)$.

Т3 (о монотонности размерности). *Размерность линейного подпространства не превосходит размерности пр–ва. Подпространство той же размерности, что и все пр–во, совпадает с пр–вом.*
Док–во. Пусть L – линейное подпространство V, dim $L = k$, dim $V = n$ => $k \le n$, т.к. иначе в n – мерном пр–ве $V \,\exists\, k$ $(k > n)$ линейно независимых векторов (например, векторы базиса L). Пусть $k = n$ и $e_1, \dots, e_n$ – базис L . dim $V = n$ => векторы $e, \dots, e_n$ образуют базис V (*В n – мерном пр–ве ∀ n линейно независимых векторов образуют базис*). Т.о., $L = V = \mathcal{L}\,(e_1, \dots, e_n)$. •
Пусть $L_1,\dots,L_k$ – линейные подпространства линейного пр–ва V. ***Суммой подпространств*** $L_1,\dots,L_k$ называется множество всевозможных векторов x , представимых в виде $x = x_1 +\ldots+ x_k$ (*разложение вектора x по подпространствам $L_1,\dots,L_k$*), где $x_i \in L_i, i = \overline{1,k}$.
$L_1 + \ldots + L_k = \sum_{i=1}^{k} L_i = \{x = x_1 + \cdots + x_k \mid x_i \in L_i, i = \overline{1,k}\,\}$
Пересечение подпространств $L_1,\dots,L_k$ называется множество $L_1 \cap \ldots \cap L_k = \{x \in V \mid x_i \in L_i, i = \overline{1,k}\,\}$
0–й вектор $\theta \in L_1 \cap \ldots \cap L_k$.

Т4. *Сумма и пересечение подпространств линейного пр–ва V являются линейными подпространствами пр–ва V.* (Вытекает из Т*, т.к. для $\sum_{i=1}^{k} L_i$ и $\bigcap_{i=1}^{k} L_i$ справедливы обе импликации)
$\forall L_i, i = \overline{1,k}$ и их пересечение являются линейными подпространствами суммы $L_1 + \ldots + L_k$, а пересечение $L_1 \cap \ldots \cap L_k$ – линейным подпространством $\forall L_i$

Т5. *Сумма линейных подпространств есть линейная оболочка совокупности базисов слагаемых подпространств.*
Док–во. Пусть $e_1, \dots,e_m, f_1, \dots,f_s,\dots, q_1, \dots,q_t$ – базисы подпространств $L_1, L_2, \dots, L_k$. Положим $W = \mathcal{L}\,(e_1, \dots,e_m, f_1, \dots,f_s,\dots, q_1, \dots,q_t)$ => $W = L_1 + \ldots + L_k$, т.к. для этих множеств имеет место двустороннее вложение. •
С. *Размерность суммы линейных подпространств = рангу совокупности слагаемых подпространств:*
$\dim \sum_{i=1}^{k} L_i$ = rg $(e_1, \dots,e_m, f_1, \dots,f_s,\dots, q_1, \dots,q_t)$.
(Вытекает из Т5 с учетом Т3)

Т6. *Для ∀ линейных подпространств L_1 и L_2 пр–ва V*:
dim $(L_1 + L_2)$ = dim L_1 + dim L_2 – dim $L_1 \cap L_2$. **(1)**
Док–во. Пусть $L_1 \cap L_2 \ne \{\theta\}$ и $f_1, \dots,f_s$ – базис $L_1 \cap L_2$.Т.к. $L_1 \cap L_2 \subset L_1$ и $L_1 \cap L_2 \subset L_2$ => по Т** векторы $f_1, \dots, f_s$ можно дополнить и до базиса L_1, и до базиса L_2 . Пусть $e_1, \dots,e_m, f_1, \dots,f$ – базис L_1, а $f_1, \dots,f_s, q_1, \dots,q_t$ базис L_2 .
Система векторов $e_1, \dots,e_m, f_1, \dots,f_s, q_1, \dots,q_t$ **(2)**
порождает $L_1 + L_2$ по Т5 и она линейно независима, т. к если $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{s} \beta_i f_i + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i q_i = \theta$, **(3)** то

$$q = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i q_i = -\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^{s} \beta_i f_i \quad \textbf{(4)}$$

=> вектор $q \in L_1 \cap L_2$ => q – линейная комбинация векторов $f_1, \dots,f_s$. Из единственности разложения вектора q по линейно независимой системе векторов $e_1, \dots,e_m, f_1, \dots, f_s$ => в (4) $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$ => в (3) в силу линейной независимости $f_1, \dots,f_s,\dots, q_1, \dots,q_t$: $\beta_1 = \ldots = \beta_s = 0$, $\gamma_1 = \ldots = \gamma_t = 0 = 0$ => только тривиальная линейная комбинация векторов (2) = θ => векторы (2) образуют базис $L_1 + L_2$ => dim $(L_1 + L_2) = m+s+t$. **(5)**
Согласно схеме построения векторов (2),
dim L_1 + dim L_2 – dim $L_1 \cap L_2 = (m + s) + (s + t) – s$ => сравнение с (5) дает (1). Если $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$, док–во ан–но, но в нем не участвуют векторы $f_1, \dots, f_s$.

---

*: *Непустое подмножество L пр–ва V является линейным подпространством этого пр–ва ⇔ имеют место импликации:*
1) $a, b \in L \Rightarrow a+b \in L$, 2) $a \in L, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha a \in L$
**: (о неполном базисе). *В n–мерном пр–ве ∀ линейно независимую систему из k, где k* < n, *векторов можно дополнить до базиса.*

4. Прямая сумма линейных пространств.

Сумма подпространств линейного пр–ва называется ***прямой суммой*** ($L_1 \oplus \ \ldots \oplus L_k$), если разложение ∀ вектора в ней по слагаемым подпространствам единственно.

Т1 (критерии прямой суммы). *Для подпространств $L_1,\dots, L_k$ конечномерного линейного пр–ва V следующие утверждения равносильны:*
1) *сумма подпространств $L_1,\dots,L_k$ – прямая;*
2) *совокупность базисов подпространств $L_1,\dots,L_k$ линейно независима;*
3) *совокупность базисов подпространств $L_1,\dots,L_k$ образует базис суммы $\sum_{i=1}^{k} L_i$;*
4) $\dim \sum_{i=1}^{k} L_i = \sum_{i=1}^{k} \dim L_i$;
5) ∃ *вектор $a \in \sum_{i=1}^{k} L_i$, для которого разложение по подпространствам $L_1,\dots,L_k$ единственно;*
6) ∀ *система ненулевых векторов $a_1, \dots, a_k$, взятых по одному из каждого $L_i, i = \overline{1,k}$, линейно независима;*
7) $L_1 \cap L_2 = \{\,\theta\,\}$ (*для k* = 2).

Док–во. 1 => 2. Пусть совокупность $e_1, \dots,e_m, f_1, \dots,f_s,\dots, q_1, \dots,q_t$ базисов подпространств $L_1,\dots,L_k$ линейно зависима и

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{s} \beta_i f_i + \cdots + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i q_i = \theta \qquad \textbf{(1)}$$

$$\text{где} \ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 + \sum_{i=1}^{s} \beta_i^2 + \cdots + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i^2 \ne 0 \quad \textbf{(2)}$$

$$\text{Пусть} \ x_1 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i, \ \ x_2 = \sum_{i=1}^{s} \beta_i f_i, \ \ \dots, x_k = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i q_i$$

$x_i \in L_i, i = \overline{1,k}$, причем среди $x_1, \dots , x_k$ в силу (2) и линейной независимости векторов ∀ базиса $\exists\, x_i \ne \theta$ => (1) можно записать $\theta = x_1 + \ldots + x_k$, $x_i \ne \theta$ **(3)**
Это дает 2–е разложение θ (кроме $\theta = \theta + \ldots + \theta$) по подпространствам $L_1,\dots,L_k$.
2 => 1. Пусть $L_1,\dots, L_k$ – не прямая сумма => ∃ b из этой суммы, который имеет 2 разложения по $L_1,\dots,L_k$:

$$b = b_1 +\ldots+b_k , \quad b = b_1' +\ldots+b_k', \quad \textbf{(4)}$$

которые отличаются хотя бы 1 слагаемым. Если вычесть из 1–го равенства 2–е и разложить каждое слагаемое $b_j – b_j'$ по базису L_j , получим нетривиаль–ную линейную комбинацию базисных векторов пр–тв $L_1, \dots, L_k$, равную θ. Это противоречит линейной независимости совокупности базисов $L_1, \dots, L_k$,.
2 <=> 3. Это следует из теоремы (*Сумма линейных подпространств есть линейная оболочка совокупности базисов слагаемых подпространств).*
3 <=> 4. Эти утверждения отличаются только терминологией.
1 => 5. Очевидно.
5 => 1. Пусть $L_1 + \ldots + L_k$ – не прямая сумма => ∃ вектор b из этой суммы, для которого имеют место 2 различных разложения (4). Вычитая, получим нетри–виальное разложение 0–го вектора (3). Если его сложить с разложением вектора a, то получим еще одно разложение вектора a.
1 => 6. Пусть система векторов $a_1,\dots, a_k$, где $a_i \in L_i$, $a_i \ne \theta, i = \overline{1,k}$, линейно зависима => ∃ числа $\alpha_1,\dots, \alpha_k \in P$, одновременно ≠0 (пусть $\alpha_i \ne 0$) : $\alpha_1 a_1+\ldots+ \alpha_i a_i +\ldots+ \alpha_k a_k = \theta$. Это дает 2–е разложение θ, отличное от тривиального (т.к. $\alpha_i a_i \ne \theta$) => противоречие с п.1.
6 => 1. Пусть $L_1 + \ldots + L_k$ – не прямая сумма, тогда ∃ вектор b, для которого имеют место 2 разложения (4). Вычитая, получим $a_{i_2} + \cdots + a_{i_q} = \theta$, где $a_{i_m} = b_{i_m} - b_{i_m}' \ne \theta, a_{i_m} \in L_{i_m}, m = \overline{1,q}$ => векторы $a_{i_2}, \dots, a_{i_q}$ линейно зависимы => ∀ система ненулевых векторов, взятых по одному из каждого $L_i, i = \overline{1,k}$, со–держащая эти векторы, линейно зависима в силу теоремы (*Если подсистема системы векторов линейно зависима, то и вся система линейно зависима*). Это противоречит 6.
4 <=> 7. Это следует из теоремы (*Для ∀ 2 линейных подпространств L_1 и L_2 линейного пр–ва V* : dim $(L_1 + L_2)$ = dim L_1 + dim L_2 – dim $L_1 \cap L_2$.) •

Т2. *Линейное пр–во V является прямой суммой своих подпространств L_1 и L_2 ⇔:*
1) dim V = dim L_1 + dim L_2 2) $L_1 \cap L_2 = \{\,\theta\,\}$
Док–во. Необх–сть из Т1 (утверждения 4,7).
Дост–сть. Из условия 2 => $L_1 + L_2$ – прямая сумма. Пусть $L = L_1 \oplus L_2$.По Т1 (У4) dim V = dim L_1 + dim L_2 => в силу условия 1: dim V = dim L => $L = V$ (*Размер–ность линейного подпространства не превосходит размерности пр–ва. Подпространство той же размерности, что и все пр–во, совпадает с пр–вом*), т.е. $V = L_1 \oplus L_2$. •
Пусть L – линейное подпространство пр–ва V. Подпространство L^{σ} называется ***дополнительным подпространством*** *к* L, если $L \oplus L^{\sigma} = V$ => L – дополнительное подпространство к L^{σ}.

Т3. *Для ∀ подпространства L линейного пр–ва V ∃ дополнительное подпространство.*
Док–во. Если $L = \{\theta\}$, то $L^{\sigma} = V$, а если $L = V$, то $L^{\sigma} = \{\theta\}$. Пусть L – нетривиальное подпространство. Пусть $e_1,\dots, e_k$ – базис L. Дополним его до базиса $e_1,\dots, e_k ,e_{k+1},\dots, e_n$ всего пр–ва V => $\mathcal{L}\,(e_{k+1},\dots, e_n) = L^{\sigma}$, т.к. для подпространства $\mathcal{L}\,(e_{k+1},\dots, e_n)$ выполнены все условия Т2. •

5. Евклидово и унитарное пространство. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца.

Пусть V – вещественное или комплексное линейное пр–во. Отображение $(\, , \,) : V\times V \to P$ называется ***скалярным произведением***, если оно удовлетворяет ***аксиомам***: для $\forall\, x, y, z \in V$ и $\forall\, \alpha \in P$

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, (в вещественном случае без черты)
2) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$
3) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$ **(1)**
4) $(x, x) \ge 0$ для $\forall\, x \in V$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

Число (x, y) называется ***скалярным произведением*** *векторов x и y*. Вещественное линейное пр–во со скалярным произведением называется ***евклидовым пространством E***, комплексное – ***унитарным V***.

Из определения скалярного произведения => св–ва:
1°. $(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$, $\forall x,y,z \in E\ (U)$.
2°. $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y)$, $\forall x, y \in E\ (U)$, $\forall\alpha \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$.
3°. $(\theta, x) = (x, \theta) = 0\ \forall x \in E\ (U)$
4°. $(x, y) = 0$ для $\forall\, y \in E\ (U) \Leftrightarrow x = \theta$.
5° . $\forall$ подпространство L евклидова (унитарного) пр–ва является евклидовым (унитарным) пр–вом.

Скалярное произведение (x, y) векторов x, y линейно по 1–му аргументу, а в евклидовом пр–ве – по обоим (св–ва 1°, 2°).

Т1. *Для* $\forall x, y \in E\ (U)$ *имеет место неравенство Коши–Буняковского*: $|(x, y)|^2 \le (x, x)\,(y, y)$ **(2)**

или $\begin{vmatrix} (x,x) & (x,y) \\ (x,y) & (y,y) \end{vmatrix} \ge 0$

Док–во. Пусть $x \ne \theta$ (для $x = \theta$ (2) – равенство). Для $\forall x, y \in E\ (U)$ и $\forall\alpha \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ согласно (1) и св–вам 1°–4°: $0 \le (\alpha x - y, \alpha x - y) = (\alpha x, \alpha x) - (\alpha x, y) - (y, \alpha x) + (y, y) = |\alpha|^2(x, x) - \alpha(x, y) - \overline{\alpha}(y, x) + (y, y)$ **(3)**

$x \ne \theta$ => $(x, x) \ne 0$. Пусть $\alpha = (y, x)/(x, x)$ => из (3) имеем

$$0 \le \frac{|y,x|^2}{(x,x)^2}(x,x) - \frac{(y,x)(x,y)}{(x,x)} - \frac{(x,y)(y,x)}{(x,x)} + (y,y)$$

=> после очевидных преобразований получим (2). •

З. Неравенство К–Б в евклидовом пр–ве:

$$(x, y)^2 \le (x, x)(y, y).$$

Т2. *Неравенство К–Б обращается в равенство* $\Leftrightarrow$ *векторы x и y коллинеарны.*

Док–во содержится в док–ве Т1: если $x = \theta$, то $x = 0y$. Если $x \ne \theta$, то (3) обращается в равенство $\Leftrightarrow$ $0 = (\alpha x - y, \alpha x - y)$, т.е. когда $y = \alpha x$. •

В евклидовом и унитарном пр–вах ***длина*** вектора x : $|x| = \sqrt{(x,x)}$.

Из аксиом скалярного произведения =>
1°. $\forall$ вектор x евклидова (унитарного) пр–ва имеет длину, при этом $|x| \ge 0$, $\forall x \in E\ (U)$ и $|x| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.
2°. $|\alpha x| = |\alpha||x|$, $\forall x \in E\ (U)$, $\forall\alpha \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$.

Неравенство Коши–Буняковского в новой терминологии: $|(x, y)| \le |x|\cdot|y|$ **(4)**

Вектор единичной длины называется ***нормированным***. $\forall$ ненулевой вектор можно нормировать, поделив его на его длину.

Т3. *В евклидовом (унитарном) пр–ве для* $\forall\, x, y$:

$$||x| - |y|| \le |x + y| \le |x| + |y| \qquad \textbf{(5)}$$

Док–во. $|x + y|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + {}$ $+ (y, x) + (y, y)$. Применив числовые неравенства треугольника, с учетом (4) :

$$|x + y|^2 \le |x|^2 + 2|x|\cdot|y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$
$$|x + y|^2 \ge |x|^2 - 2|x|\cdot|y| + |y|^2 = (|x| - |y|)^2$$

=> (5). •

Неравенства (5) называются ***неравенствами треугольника в евклидовом (унитарном) пр–ве***.

В евклидовом пр–ве ***углом*** между ненулевыми векторами x и y называется угол φ, $0 < \varphi < \pi$:

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{|x|\cdot|y|}$$

В унитарном пр–ве понятие угла между векторами не определено.

6. Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Существование ОНБ.

Пусть V – вещественное или комплексное линейное пр–во. Отображение $(\, , \,) : V\times V \to P$ называется ***скалярным произведением***, если оно удовлетворяет аксиомам: для $\forall\, x, y, z \in V$ и $\forall\, \alpha \in P$

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, (в вещественном случае без черты)
2) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ 3) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$
4) $(x, x) \ge 0$ для $\forall\, x \in V$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

Число (x, y) называется ***скалярным произведением*** *векторов x и y*. 2 вектора $x, y \in E\ (U)$ называются ***ортогональными***, если $(x, y) = 0$. Из св–ва ($(x, y) = 0$ для $\forall\, y \in E\ (U) \Leftrightarrow x = \theta$) => только 0–й вектор θ, ортогонален $\forall$ вектору пр–ва. В евклидовом пр–ве вследствие $\cos\varphi = \frac{(x,y)}{|x|\cdot|y|}$ ортогональность векторов x и y означает, что либо один из них 0–й, либо угол между ними = $\pi/2$.

Система векторов $x_1,\dots, x_k \in E\ (U)$ – ***ортогональная***, если $(x_i , x_j) = 0$ при $i \ne j$ **(1)**

Система $x_1,\dots, x_k \in E\ (U)$ – ***ортонормированная***, если

$$(x_i, x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \ne j \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

Т1. *Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.*

Док–во. Пусть $x_1,\dots, x_k \in E\ (U)$ – ортогональная система ненулевых векторов. Умножая обе части равенства $\alpha_1 x_1 +\dots+ \alpha_i x_i +\dots+ \alpha_k x_k = \theta$ **(3)** скалярно на x_i , получаем по (1) $\alpha_i (x_i , x_i) = 0$, $i = \overline{1,k}$. По условию $x_i \ne \theta$ => $(x_i , x_i) \ne 0$ => в (3) все $\alpha_i = 0$ => векторы системы линейно независимы. •

***С*1**. *Ортонормированная система векторов линейно независима.*

***С*2**. *В n–мерном евклидовом (унитарном) пр–ве* $\forall$ *ортонормированная система из n векторов образует базис.*

Базис, векторы которого образуют ортонормирован–ную систему, называется ***ортонормированным базисом*** **(ОНБ)**. Из (2) => $e_1,\dots, e_k$ – ОНБ $E\ (U)$, если $(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \ne j \end{cases}$ **(4)**

Т2. *В евклидовом (унитарном) пр–ве координаты* $x_1,\dots, x_n$ *вектора x в базисе* $e = (e_1, \dots, e_n)$ *вычисляются по правилу* $x_i = (x, e_i)$, $i = \overline{1,n}$ **(5)** $\Leftrightarrow$ *e – ОНБ.*

Док–во. Необ–сть. Пусть для $\forall\, x \in E\ (U)$ координаты в базисе e вычисляются по (5) => по (5) вычисляются координаты и базисных векторов: $e_i = 0e_1 + \dots + 0e_{i-1} + 1e_i + 0e_{i+1} + \dots + 0e_n$, $i = \overline{1,n}$. Сравнение координат e_i с (5) приводит к (4).

Дост–сть. Если e – ОНБ и $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, то св–во линейности скалярного произведения с учетом (4) приводит к (5). •

Т3. *В евклидовом (унитарном) пр–ве скалярное произведение векторов* $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, *заданных своими координатами в базисе e, вычисля–ется по правилу* $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i$ **(6)** $\Leftrightarrow$ *e – ОНБ.*

Док–во. Необх–сть. Если скалярное произведение вычисляется согласно (6) для $\forall$ пары векторов, то это же верно для пары базисных векторов e_i и e_j, координаты которых известны. Применив правило (6) для вычисления (e_i, e_j), получим равенства (4).

Дост–сть. Если e – ОНБ и $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ => в силу свойства линейности скалярного произведения имеем

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i , \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \overline{y_j} (e_i, e_j) = $$
$$= \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} \quad \blacksquare$$

З. В евклидовом пр–ве черту в (6) можно опустить: $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Т4. *В конечномерном евклидовом (унитарном) пр–ве* $\exists$ *ОНБ.*

Док–во (по индукции). Пусть $\dim V = n$. При $n = 1$ можно взять любой вектор $f \ne \theta$ и положить $e_1 = f/|f|$. Пусть в $\forall$ $(n-1)$–мерном евклидовом (унитарном) пр–ве $\exists$ ОНБ. Пусть $f_1,\dots,f_n$ – базис $E\ (U)$. Линейная оболочка $\mathcal{L}(f_1,\dots, f_{n-1})$ является $(n-1)$–мерным пр–вом, и в нем по индуктивному предположению $\exists$ ОНБ $e_1,\dots, e_{n-1}$. Т.к. $f_n \notin \mathcal{L}(f_1,\dots, f_{n-1}) = \mathcal{L}(e_1,\dots, e_{n-1})$, то вектор $g_n = f_n - \alpha_1 e_1 - \dots - \alpha_{n-1} e_{n-1} \ne \theta$ при $\forall\alpha_i \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$. Выберем коэффициенты α_i, $i = \overline{1, n-1}$, из условия ортогональности вектора g_n всем векторам $e_1,\dots, e_{n-1}$: $0 = (g_n, e_i) = (f_n, e_i) - \alpha_i$, $i = \overline{1, n-1}$. Тогда, положив $e_n = g_n/|g_n|$, получим ОНБ $e_1,\dots, e_n$ пр–ва $E\ (U)$. •

7. Изометрия.

2 линейных пр–ва V_1 и V_2 над общим полем P называ-ются ***изоморфными*** ($V_1 \cong V_2$), если $\exists$ биективное отображение $\varphi: V_1 \to V_2$, которое сохраняет законы композиции, т.е. если для $\forall\, x, y \in V_1$ и $\forall$ числа $\alpha \in P$
1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ 2) $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$.

Само отображение φ называется ***изоморфизмом линейных пространств***.

Свойства изоморфных пр–тв:
1°. *Отношение изоморфизма есть отношение эквивалентности на множестве всех линейных пр–тв над полем P.*
2°. *В изоморфных пр–вах*
а) образ (и прообраз) линейной комбинации векторов есть линейная комбинация образов (прообразов) с теми же коэффициентами;
б) образ (и прообраз) нулевого вектора есть нулевой вектор;
в) образ (и прообраз) линейно независимой системы векторов образует линейно независимую систему;
г) образ (и прообраз) базиса есть базис.

Т (критерий изоморфизма). *2 линейных пр–ва над общим полем изоморфны* $\Leftrightarrow$ *их размерности равны.*

Док–во. Необх–сть вытекает из св–ва *"г"* изоморфных пр–тв.

Дост–сть. Пусть V_1 и V_2 – линейные пр–ва над полем P и $\dim V_1 = \dim V_2 = n$. Пусть $e_1, \dots,e_n$ – базис V_1 , $f_1,\dots, f_n$ – базис V_2 . Построим отображение $\varphi: V_1 \to V_2$, : $\forall\, x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \in V_1 \to y = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \in V_2$(т.е. вектор y имеет те же координаты, что и x). Из единственности разложения вектора по базису => отображение φ биективно. И φ – изоморфизм, т.к. координаты вектора обладают св–вом линейности. •

Евклидовы пр–ва E_1 и E_2 называются ***изоморфными***, если $\exists$ биективное отображение $\varphi: E_1 \to E_2$, которое сохраняет законы композиции и скалярное произведение:
1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\forall x, y \in E_1$
2) $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$, $\forall x \in E_1$, $\forall\alpha \in \mathbb{R}$
3) $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$, $\forall x, y \in E_1$

Само отображение φ называется ***изоморфизмом евклидовых пространств*** или ***изометрией***.

Для унитарных пространств все также, но в св–ве 2: $\alpha \in \mathbb{C}$. Из определения => изоморфные евклидовы (унитарные) пр–ва изоморфны как линейные пр–ва.

Т1. *Два евклидовых (унитарных) пр–ва изоморфны* $\Leftrightarrow$ *равны их размерности.*

Док–во. Необх–сть вытекает из изоморфизма евклидовых (унитарных) пр–тв как линейных пр–тв.

Дост–сть. Пусть V_1 , V_2 – оба евклидовы (оба унитарные) пр–ва и пусть $\dim V_1 = \dim V_2 = n$. Выберем в V_1 и V_2 ОНБ $e_1, \dots,e_n$ и $e_1', \dots,e_n'$. Построим отображение $\varphi: V_1 \to V_2$, поставив в соответствие каждому вектору $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in V_1$ вектор $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i e_i'$. Из док–ва критерия изоморфизма => отображение φ – изоморфизм линейных пр–тв V_1 и V_2. Оно сохраняет скалярное произведение, т.к. если $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i'$, то

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i, \quad (\varphi(x), \varphi(y)) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i$$

согласно теореме (*В евклидовом (унитарном) пр–ве скалярное произведение векторов* $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ *, заданных своими координатами в базисе e, вычисляется по правилу* $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i$ $\Leftrightarrow$ *e – ОНБ*) :

8. Матрица Грама. Критерий линейной зависимости.

Пусть V – вещественное или комплексное линейное пр–во. Отображение $(\, , \,) : V\times V \to P$ называется ***скалярным произведением***, если оно удовлетворяет аксиомам: для $\forall\, x, y, z \in V$ и $\forall\, \alpha \in P$

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, (в вещественном случае без черты)
2) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ 3) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$
4) $(x, x) \ge 0$ для $\forall\, x \in V$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

Матрицей Грама *системы векторов* $a_1, \dots,a_k$ евклидова (унитарного) пр–ва называется матрица

$$G(a_1, \dots, a_k) = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & \cdots & (a_k, a_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_1, a_k) & \cdots & (a_k, a_k) \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

Определитель матрицы Грама называется ***определителем Грама***.

Т1. *Система векторов* $a_1, \dots,a_k$ *евклидова (унитар–ного) пр–ва линейно зависима* $\Leftrightarrow$ $\det G(a_1, \dots, a_k) = 0$.

Док–во. Необх–сть. Пусть $a_1, \dots, a_k$ – линейно зависимая система векторов. Последовательно умножая нетривиальную линейную комбинацию

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = \theta \qquad \textbf{(2)}$$

скалярно на векторы $a_1, \dots,a_k$, получим однородную систему уравнений относительно $\alpha_1, \dots, \alpha_k$:

$$\begin{cases} \alpha_1(a_1, a_1) + \dots + \alpha_k(a_k, a_1) = 0, \\ \qquad \dots \\ \alpha_1(a_1, a_k) + \dots + \alpha_k(a_k, a_k) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(3)}$$

с матрицей коэффициентов $G(a_1, \dots, a_k)$. Т.к. $\exists$ нетри-виальное решение этой системы (*Однородная система Ax=0 с квадратной матрицей имеет нетривиальное решение* $\Leftrightarrow$ $|A| = 0$) => $\det G(a_1, \dots, a_k) = 0$.

Дост–сть. Пусть $\det G(a_1, \dots,a_k) = 0$=> (3) имеет нетривиальное решение $a_1, \dots,a_k$. Перепишем ее:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i a_i, a_1 \right) = 0, \\ \qquad \dots \\ \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i a_i, a_k \right) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(4)}$$

=> вектор $g = \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i \in \mathcal{L}(a_1,\dots, a_k)$ и ортогонален $\mathcal{L}(a_1,\dots, a_k)$ => по аксиоме 4 скалярного произведе–ния вектор g может быть только 0–м => для $a_1, \dots, a_k$ имеет место (2) => с учетом нетривиальности набора $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ следует линейная зависимость $a_1, \dots, a_k$. •

$A^H = (a_{ij}^h)$ – сопряженная к $A = (a_{ij})$: $a_{ij}^h = \overline{a}_{ji}$

Матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ называется ***эрмитовой*** *матрицей*, если $A^H = A$. **(5)** => $|A| \in \mathbb{R}$

Матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется ***симметрической*** (или ***вещественной эрмитовой***), если $A^T = A$. **(6)**

Т2. *Матрица Грама системы векторов евклидова (унитарного) пр–ва эрмитова.*

Док–во. Пусть $G(a_1, \dots, a_k) = G = (g_{ij})$. Из (1) => $g_{ij} = (a_j, a_i)$, $g_{ji} = (a_i, a_j)$, т.е. $g_{ij} = \overline{g}_{ji}$ => $G^H = G$, в вещественном случае, $G^T = G$. •

Т3. *Определитель Грама линейно независимой системы векторов в евклидовом (унитарном) пр–ве положителен.*

Док–во. Пусть $a_1, \dots,a_k$ – линейно независимая система векторов евклидова пр–ва => $\dim \mathcal{L}(a_1,\dots, a_k) = k$. Выберем ОНБ $e_1, \dots,e_k$ линейной оболочки $\mathcal{L}(a_1,\dots, a_k)$. Составим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

столбцы – координаты векторов $a_1, \dots,a_k$ в базисе $e = (e_1, \dots,e_k)$ => (по Т: *В евклидовом (унитарном) пр–ве скалярное произведение векторов* $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ *, заданных координатами в базисе e, вычисляется по* $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i$ $\Leftrightarrow$ *e – ОНБ*)

$$(a_i, a_j) = \sum_{s=1}^n a_{sj} \overline{a_{si}} = \sum_{s=1}^n a_{is}^h a_{sj} = \{A^H A\}_{ij}, \quad i, j = \overline{1,k}$$

=> $G(a_1, \dots, a_k) = A^H A$ и $\det G(a_1, \dots, a_k) = |\det A|^2$
=> $\det G(a_1, \dots, a_k) \ge 0$. Т.к. система $a_1, \dots, a_k$ линейно независима => по Т1 $\det G(a_1, \dots, a_k) \ne 0$ => $\det G(a_1, \dots, a_k) > 0$

З. В вещественном случае $G(a_1, \dots, a_k) = A^T A$.

9. Ортогональное дополнение. Ортогональная сумма подпространств. Расстояние от вектора до подпространства.

Пусть L – линейное подпространство евклидова (унитарного) пр–ва $E\ (U)$. Вектор x называется ***ортогональным к подпространству*** L $(x \perp L)$, если он ортогонален $\forall y \in L$.

$x \perp \mathcal{L}(a_1,\dots,a_k) \Leftrightarrow x \perp a_i,\ i = \overline{1,k}$. Совокупность всех векторов $x \in E\ (U)$, ортогональных подпространству L, называется ***ортогональным дополнением*** $L^{\perp}$ к L.

Т 1. *Ортогональное дополнение к подпространству является линейным подпространством.*

Док–во. Пусть $y_1, y_2 \in L^{\perp}$, тогда $(y_1, x) = (y_2, x) = 0$ для $\forall x \in L$. Складывая эти равенства => $(y_1+y_2, x) = 0$, $\forall x \in L$ => $y_1 + y_2 \in L^{\perp}$. Если $(y, x) = 0, \forall x \in L$, то $(\alpha y, x) = 0$ => $\alpha y \in L^{\perp}$ => $L^{\perp}$ – линейное подпространство по Т (*Непустое подмножество L пр–ва V является линейным подпространством этого пр–ва* $\Leftrightarrow$ *имеют место импликации:1) $a, b \in L$ =>$a+b \in L$, 2) $a \in L, \alpha \in R$ => $\alpha a \in L$*) •

Т2. *Если L – линейное подпространство E (U), то* $L \oplus L^{\perp} = E(U)$ **(1)**

Док–во. Для тривиального подпространства очевидно. Пусть L – нетривиальное подпространство. Возьмем $e_1, \dots, e_k$ – ОНБ L, $e_{k+1}, \dots, e_n$ – ОНБ $L^{\perp}$. Система векторов $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ ортонормирована => линейно независима (Т (*Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима*)). Покажем, что она образует базис всего пр–ва $E\ (U)$. Пусть это не так. Тогда $\exists$ вектор f пр–ва, который не является линейной комбинацией $e_1,\dots, e_n$. Система векторов $e_1,\dots, e_n, f$ линейно независима, и применение процесса ортогонализации приводит к вектору e_{n+1}, который ортогонален $e_1,\dots, e_n$ и, значит, $e_{n+1} \in L^{\perp}$. С другой стороны, $e_{n+1} \perp L^{\perp}$, т.к. e_{n+1} ортогонален $e_{k+1}, \dots, e_n$ => $e_{n+1} = \theta$ => линейная зависимость $e_1,\dots, e_n, f$, что противоречит допущению. Т.о., система $e_1,\dots, e_n$ является базисом $E\ (U)$ и $\dim L + \dim L^{\perp} = \dim E\ (U)$.Т.к. $L \cap L^{\perp} = \{\theta\}$, то получаем (1) по Т (*Линейное пр–во V является прямой суммой своих подпространств L_1 и L_2* $\Leftrightarrow$:1) $\dim V = \dim L_1 + \dim L_2$; 2) $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$). •

С. *Если L – линейное подпространство E (U), то для* $\forall f \in E\ (U)\ \exists\,!$ *разложение (где $g \in L$, $h \perp L$):*

$$f = g + h \qquad \textbf{(2)}$$

Вектор g в (2) – ***ортогональная проекция*** *вектора f на L (перпендикуляр, опущенный из вектора f на L),* вектор h – ***ортогональная составляющая*** *вектора f*, вектор f – ***наклонная*** *к подпространству L.*

$$|f|^2 = (g+h, g+h) = (g,g) + (h,h) \Rightarrow$$

$|f|^2 = |g|^2 + |h|^2$ **(3)** – *теорема Пифагора в евклидовом (унитарном) пр–ве*

Множество M называется ***метрическим пр–вом***, если задано отображение $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$, которое каждой упорядоченной паре элементов $x, y \in M$ ставит в соответствие число $\rho(x, y) \in \mathbb{R}$ такое, что:

1) $\rho(x, y) \geq 0,\ \forall x, y \in M$; $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x),\ \forall x, y \in M$
3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)\ \forall x, y \in M$.

Число $\rho(x, y)$ – ***расстояние между x и y***; отображение ρ – ***метрика***, аксиомы 1–3 – ***аксиомы метрики***. ***Расстоянием между множествами X и Y*** в метрическом пр–ве называется число

$$\rho(X,Y) = \inf_{x\in X, y \in Y} \rho(f,y)$$

Т3. *В евклидовом (унитарном) пр–ве V правило* $\rho(x,y) = |x - y|$ *задает метрику.*

Док–во. Правило определяет отображение $\rho: V \times V \to \mathbb{R}$, которое отвечает всем аксиомам метрики. Например: $\rho(x,z) = |x-z| = |(x-y)+(y-z)| \leq |x-y| + |y-z| = \rho(x,y) + \rho(y,z)$. •

Т4 (о кратчайшем расстоянии). *Расстояние между вектором f и линейным подпространством L в евклидовом (унитарном) пр–ве равно длине перпендикуляра, опущенного из вектора f на L .*

Док–во. Пусть $f = g + h$, где $g \in L$, $h \perp L$, $\forall y \in L$ => $\rho(f,y) = |f-y| = |(g+h)-y| = |h+(g-y)| =$ ={в силу(3)}$= \sqrt{|h|^2+|g-y|^2}$ => $\rho(f,y) \geq |h|$, $\forall y \in L$ и $\rho(f,y) = |h|$, если $y = g$ =>

$$|h| = \inf_{y \in L} \rho(f,y) = \rho(f,L) \quad \blacksquare$$

Т4 в других терминах:

1) *расстояние между вектором f и подпространством L, равно расстоянию между вектором f и его ортогональной проекцией на L;*
2) *среди всех векторов подпространства L ближе всего к вектору f расположена его ортогональная проекция на L .*

10. Ортонормированный базис и унитарные (ортогональные) матрицы.

2 вектора $x, y \in E\ (U)$ ***ортогональны***, если $(x, y) = 0$.
Система векторов $x_1,\dots, x_k \in E\ (U)$ ***ортогональна***, если $(x_i, x_j) = 0$ при $i \neq j$ **(1)**
Система $x_1,\dots, x_k \in E\ (U)$ ***ортонормированная***, если

$$(x_i, x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

Т1. *Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.*

Док–во. Пусть $x_1,\dots, x_k \in E\ (U)$ – ортогональная система, $x_i \neq \theta$. Умножая скалярно на x_i равенство $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_i x_i + \dots + \alpha_k x_k = \theta$ **(3)**, получаем в силу (1) $\alpha_i (x_i, x_i) = 0,\ i = \overline{1,k}$. По условию $x_i \neq \theta$ => $(x_i, x_i) \neq 0$ => все $\alpha_i = 0$ => система линейно независима. •

***Сл*1**. *Ортонормированная система векторов линейно независима.*

***Сл*2.** *В n–мерном евклидовом (унитарном) пр–ве* $\forall$ *ортонормированная система из n векторов образует базис.*

Базис, векторы которого образуют ортонормирован–ную систему, называется ***ортонормированным базисом*** **(ОНБ)**. Из (2) => $e_1,\dots, e_k$ – ОНБ $E\ (U)$, если $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ **(4)**

Т2. *В евклидовом (унитарном) пр–ве координаты $x_1,\dots, x_n$ вектора x в базисе e = ($e_1,\dots, e_n$) вычисляются по правилу* $x_i = (x, e_i)$, $i = \overline{1,n}$ **(5)** $\Leftrightarrow$ *e – ОНБ.*

Док–во. Необх–сть. Пусть для $\forall x \in E\ (U)$ координаты в базисе e вычисляются согласно (5) => по (5) вычисляются координаты и базисных векторов: $e_i = 0e_1 + \dots + 0e_{i-1} + 1e_i + 0e_{i+1} + \dots + 0e_n$, $i = \overline{1,n}$. Сравнение координат вектора e_i с (5) приводит к (4).
Дост–сть. Если e – ОНБ и $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, то свойство линейности скалярного произведения с учетом (4) приводит к (5). •

Т3. *В евклидовом (унитарном) пр–ве скалярное произведение векторов* $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, *заданных своими координатами в базисе e, вычисля–ется по правилу* $(x,y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i$ **(6)** $\Leftrightarrow$ *e – ОНБ.*

Док–во. Необх–сть. Если скалярное произведение вычисляется по (6) для $\forall$ пары векторов, то это же верно для пары базисных векторов e_i и e_j, координаты которых известны. Применив правило (6) для вычисления (e_i, e_j), получим равенства (4).
Дост–сть. e – ОНБ и $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ => в силу линейности скалярного произведения:

$$(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \overline{y_j}(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} \quad \blacksquare$$

$A^H = (a_{ij}^h)$ – сопряженная к $A = (a_{ij})$: $a_{ij}^h = \overline{a_{ji}}$
Матрица $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ***унитарна***, если $U U^H = U^H U = I$
Матрица $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ***ортогональна***, если $Q Q^T = Q^T Q = I$

Т4. *Матрица ортогональна (унитарна)* $\Leftrightarrow$ *она является матрицей перехода от одного ОНБ к другому ОНБ евклидова (унитарного) пр–ва.*

Док–во. Пусть e, e' – 2 ОНБ. Векторы одного базиса можно выразить через векторы другого:

$e_1' = c_{11} e_1 + \dots + c_{n1} e_n$
…
$e_n' = c_{1n} e_1 + \dots + c_{nn} e_n$

=>столбцы матрицы перехода C являются координатами векторов базиса e' в базисе e. По Т3: $(e_i', e_j') = \sum_{k=1}^n c_{ki}\overline{c}_{ki}$ $\Leftrightarrow$ e – ОНБ => условие ортонормированности базиса e' $\Leftrightarrow$ условию ортогональности (унитарности) матрицы:

$$\sum_{k=1}^n c_{ki}\overline{c_{ki}} = \begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^n c_{ik}\overline{c_{jk}} = \begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

11. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. QR–разложение матрицы.

2 вектора $x, y \in E\ (U)$ ***ортогональны***, если $(x, y) = 0$.
Система векторов $x_1,\dots, x_k \in E\ (U)$ ***ортогональна***, если $(x_i, x_j) = 0$ при $i \neq j$ **(1)**
Система $x_1,\dots, x_k \in E\ (U)$ ***ортонормированная***, если

$$(x_i, x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

Т1. *Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.*

Док–во. Пусть $x_1,\dots, x_k \in E\ (U)$ – ортогональная система, $x_i \neq \theta$. Умножая скалярно на x_i равенство $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_i x_i + \dots + \alpha_k x_k = \theta$ **(3)**, получаем в силу (1) $\alpha_i (x_i, x_i) = 0,\ i = \overline{1,k}$. По условию $x_i \neq \theta$ => $(x_i, x_i) \neq 0$ => все $\alpha_i = 0$ => система линейно независима. •

***Сл*1**. *Ортонормированная система векторов линейно независима.*

***Сл*2.** *В n–мерном евклидовом (унитарном) пр–ве* $\forall$ *ортонормированная система из n векторов образует базис.*

Базис, векторы которого образуют ортонормирован–ную систему, называется ***ортонормированным базисом*** **(ОНБ)**. Из (2) => $e_1,\dots, e_k$ – ОНБ $E\ (U)$, если $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ **(4)**

Процесс ортогонализации. Пусть в евклидовом (унитарном) пр–ве задан базис $f_1,\dots, f_n$. По нему надо построить ОНБ $e_1,\dots, e_n$.
1–й шаг. Полагая $g_1 = f_1$, находим $e_1 = g_1/|g_1|$.
k–й шаг ($k \geq 2$). Полагаем $g_k = f_k - \alpha_1 e_1 - \dots - \alpha_{k-1} e_{k-1}$, где $\alpha_i = (f_k, e_i)$, $i = \overline{1,k-1}$, и находим $e_k = g_k/|g_k|$.
Через n шагов получим ОНБ $e_1,\dots,e_n$ пр–ва.
Описанный алгоритм состоит в следующем.

Матрица $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ***унитарна***, если $U U^H = U^H U = I$
Матрица $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ***ортогональна***, если $Q Q^T = Q^T Q = I$

Т4. *Матрица ортогональна (унитарна)* $\Leftrightarrow$ *она является матрицей перехода от одного ОНБ к другому ОНБ евклидова (унитарного) пр–ва.*

Док–во. Пусть e, e' – 2 ОНБ. Векторы одного базиса можно выразить через векторы другого:

$e_1' = c_{11} e_1 + \dots + c_{n1} e_n$
…
$e_n' = c_{1n} e_1 + \dots + c_{nn} e_n$

=>столбцы матрицы перехода C являются координатами векторов базиса e' в базисе e. Согласно теореме (*В евклидовом (унитарном) пр–ве скалярное произведение векторов* $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, *заданных своими координатами в базисе e, вычисляется по правилу* $(x,y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i$ $\Leftrightarrow$ *e – ОНБ*): $(e_i', e_j') = \sum_{k=1}^n c_{ki}\overline{c_{ki}}$ $\Leftrightarrow$ e – ОНБ => условие ортонормированности базиса e' $\Leftrightarrow$ условию ортогональности (унитарности) матрицы:

$$\sum_{k=1}^n c_{ki}\overline{c_{ki}} = \begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^n c_{ik}\overline{c_{jk}} = \begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

QR–разложение. Пусть $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ имеет линейно независимые столбцы $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}^n$ и к ним применялся процесс ортогонализации Грама–Шмидта => в результате получаются ортонормированные векторы $q_1,\dots, q_m \in \mathbb{C}^m$. $a_k \in \mathcal{L}(q_1,\dots, q_k)$, $k = \overline{1,m}$ => для каких–то чисел r_{ik}: $a_k = \sum_{i=1}^k r_{ik} q_k$ или:

$$A = QR, \quad Q = [q_1, \dots, q_m], \qquad R = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & r_{mm}\end{bmatrix}$$

Разложение $\boldsymbol{A = QR}$, где Q имеет ортонормированные столбцы, а R – верхняя треугольная матрица, называется ***QR–разложением*** матрицы A.
=> *для* $\forall$ *прямоугольной матрицы с линейно незави–симыми столбцами существует QR–разложение.*

Т5. $\forall$ *прямоугольная матрица, в которой число строк не меньше числа столбцов, обладает QR–разложением с верхней ступенчатой матрицей R.*

Док–во. Пусть a_{i_1} – 1–й ненулевой столбец матрицы A; a_{i_2} – 1–й столбец: $a_{i_2} \notin \mathrm{L}(a_{i_1})$; a_{i_3} – 1–й столбец: $a_{i_3} \notin \mathrm{L}(a_{i_1}, a_{i_2})$, и т.д. => получаем в A базисную систему столбцов $a_{i_1}, \dots, a_{i_{1r}}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_r$, обладающую св–вами: $a_j = 0$ при $j < i_1$;
$a_j \in \mathcal{L}(a_{i_1}, \dots, a_{i_l})$ при $i_l < j < i_{l+1}$, $l = 1,\dots, r-1$;
$a_j \in \mathcal{L}(a_{i_1}, \dots, a_{i_r})$ при $i_r < j$
Найдем QR–разложение: $[a_{i_1}, \dots, a_{i_r}] = [q_{i_1}, \dots, q_{i_r}]R_r$.
Систему столбцов $q_{i_1}, \dots, q_{i_r}$ дополним до ОНБ в n–мерном пр–ве столбцов и из полученных столбцов составим матрицу Q, сохранив первоначальные столбцы в позициях $i_1, \dots, i_r$.
Записав $A = QR$, видим, что в матрице R первые r элементов i_l–го столбца те же, что в l–м столбце матрицы R_r. В то же время, j–й столбец при $i_l < j < i_{l+1}$ имеет 0 в позициях ниже i_l–й.

12. Линейное афинное многообразие в линейном пр–ве. Гиперплоскость.

Пусть V – линейное пр–во, L – некоторое его подпро–странство, x_0 – некоторый вектор пр–ва V. Множество H всевозможных векторов вида $x_0 + x$, где $x \in L$, называется ***линейным аффинным многообразием*** *пр–ва V, полученным сдвигом L на вектор x_0.* x_0 – ***вектор сдвига***, а L – ***направляющее подпространство***:

$$H = x_0 + L = \{x_0 + x \mid x \in L\}. \Rightarrow$$

1°. $x_0 \in H$, т.к. $x_0 = x_0 + \theta$, $\theta \in L$.
2°. *Разность двух векторов линейного многообразия принадлежит направляющему подпространству*, т.к. если $z_1 = x_0 + x$, $z_2 = x_0 + y$, $x, y \in L$, то $z_1 - z_2 = x - y \in L$.

Т1. *2 линейных многообразия $H_1 = x_1 + L_1$ и $H_2 = x_2 + L_2$ совпадают* $\Leftrightarrow$ $L_1 = L_2 = L$ *и* $x_1 - x_2 \in L$.

Док–во. Необ–сть. Пусть $H_1 = H_2$ => $x_1 \in H_2$ и, в силу св–ва 2°, $x_1 - x_2 \in L_2$. Покажем: $L_1 = L_2$. Для $\forall x \in L_1$ имеем $x_1 + x \in H_1$. Т.к. $H_1 = H_2$, то $\exists\, y \in L_2$: $x_1 + x = x_2 + y$ => $x = (x_2 - x_1) + y$, где $x_1 - x_2 \in L_2$, $y \in L_2$. => $x \in L_2$ и $L_1 \subset L_2$. Ан–но $L_2 \subset L_1$ => $L_1 = L_2$.
Дост–сть. $L_1 = L_2 = L$ *и* $x_1 - x_2 \in L$ => для $\forall z \in H_1$: $z = x_1 + x$, где $x \in L$, или $z = x_2 + (x_1 - x_2) + x$, $x \in L$,. Т. к. $x_1 - x_2 \in L$ и $x \in L$, то $(x_1 - x_2) + x \in L$ => $z \in H_2$ и $H_1 \subset H_2$. Ан–но $H_2 \subset H_1$ => $H_1 = H_2$. •

***С*1**. *Вектором сдвига может быть* $\forall$ *вектор линейного многообразия.*
Если x_1 – произвольный вектор линейного многообразия $H = x_0 + L$, то $x_1 - x_0 \in L$ и $H = x_1 + L$.

***С*2**. *Линейное многообразие может быть получено сдвигом единственного направляющего подпространства.* (вытекает из Т1).

Размерностью линейного многообразия ($\dim H$) называется размерность его направляющего подпро–странства. Линейное многообразие размерности 1 – ***прямая в линейном пр-ве***, размерности $(n - 1)$, где $n = \dim V$, – ***гиперплоскость***, а размерности k, $1 < k < n - 1$, – *k–мерная плоскость.*

Линейные многообразия $H_1 = x_1 + L_1$ и $H_2 = x_2 + L_2$ в пр–ве V ***параллельны***, если или $L_1 \subset L_2$, или $L_2 \subset L_1$.

Т2. *Если 2 линейных многообразия с непустым пересечением параллельны, то одно из них содержит другое.*

Док–во. Пусть $H_1 = x_1 + L_1$ и $H_2 = x_2 + L_2$ параллельны и пусть $L_1 \subset L_2$. По условию $\exists\, x_0 \in H_1 \cap H_2$. Т.к. вектором сдвига может быть $\forall$ вектор линейного многообразия, то $H_1 = x_0 + L_1$ и $H_2 = x_0 + L_2$ => с учетом $L_1 \subset L_2$: $H_1 \subset H_2$. •

***С*3**. *Если линейные многообразия параллельны, то либо они не пересекаются, либо одно из них содержится в другом.*

Т3. *Непустое пересечение линейных многообразий $H_1 = x_1 + L_1$ и $H_2 = x_2 + L_2$ является линейным многообразием с направляющим подпространством $L_1 \cap L_2$.*

Док–во. По условию $\exists\, x_0 \in H_1 \cap H_2$ => $H_1 = x_0 + L_1$ и $H_2 = x_0 + L_2$ => $H_1 \cap H_2 = x_0 + L_1 \cap L_2$, т.к. для этих множеств имеет место двустороннее вложение. •

Т4. *Всякое k–мерное линейное многообразие в n–мерном пр–ве можно задать в виде пересечения n – k гиперплоскостей.*

Док–во. Пусть $H = x_0 + L$ – k–мерное линейное многообразие и $e_1,\dots, e_k$ – базис L. Дополним его до базиса $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ пр–ва V. В качестве искомых гиперплоскостей можно взять линейные многообразия $H_i = x_0 + L_i$, где $i = \overline{1, n-k}$, где L_i – линейная оболочка всех векторов базиса V, кроме e_{k+i}:
$L_i = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_{k+i-1}, e_{k+i+1}, \dots, e_n)$ => $L_1 \cap L_2 \cap \dots \cap L_{n-k} = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_k) = L$. По Т3 => $H = H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_{n-k}$. Т.к. $\dim L_i = n - 1$, $i = \overline{1, n-k}$, то H_i – гиперплоскости. •

Т5. *Пересечение $H = x_0 + L$ с* $\forall$ *подпространством, дополнительным к L, состоит ровно из 1 вектора.*

Док–во. L^6 – дополнительное к L. Т.к. $L \oplus L^6 = V$, то для x_0 $\exists$ разложение $x_0 = y + z$, где $y \in L$, $z \in L^6$ => $z = x_0 - y \in H$, ибо $-y \in L$ => z – общий вектор L^6 и H, т.е. $z \in L^6 \cap H$.
Пусть $z' \in L^6 \cap H$ => т.к. $z \in H$, $z' \in H$, то по св–ву 2° $z - z' \in L$, а т.к. $z \in L^6$, $z' \in L^6$, то $z - z' \in L^6$.
Из $L \cap L^6 = \{\theta\}$ => $z - z' = 0$, т.е. $z = z'$. •

Пусть $H = x_0 + L$ – линейное многообразие в евкли–довом (унитарном) пр–ве. Вектор $n \in H$, $n \perp L$, – ***нормальный вектор линейного многообразия*** L.

Т6. *Для* $\forall$ *линейного многообразия в евклидовом (унитарном) пр–ве* $\exists\,!$ *нормальный вектор.*

Док–во. Рассмотрим $H = x_0 + L$. Все векторы из H, ортогональные L, находятся в $H \cap L^{\perp}$, но $H \cap L^{\perp}$ состоит ровно из 1 вектора n, т.к. $L^{\perp}$ – дополнитель–ное к L (Т5 и (*Если L – линейное подпространство E (U), то* $L \oplus L^{\perp} = E(U)$)). Этот вектор n будет единственным нормальным вектором H. •

Т7. *Нормальный вектор линейного многообразия совпадает с перпендикуляром, опущенным из* $\forall$ *вектора линейного многообразия на направляющее подпространство.*

Док–во. Пусть n – нормальный вектор линейного многообразия $H = x_0 + L$ => $H = n + L$ => $\forall f \in H$ можно представить в виде $f = n + g$, $g \in L$. Т.к. $n \perp L$, то это соотношение совпадает с разложением вектора f на ортогональную проекцию g и перпендикуляр n. •

Сл. *Среди всех векторов линейного многообразия нормальный вектор имеет наименьшую длину.*

Пусть $H = x_0 + L$ – гиперплоскость в $E\ (U)$, т.е. $\dim L = m - 1$, где m= $\dim E$ ($\dim U$) => $L^{\perp}$ – 1-мерное подпространство и его базис состоит из 1вектора n.
$x \in H \Leftrightarrow$ разность $x - x_0 \in L$, т.е. $(x - x_0, n) = 0$. **(1)**
=> (1) удовлетворяют все векторы x гиперплоскости H, и только они. (1) $\Leftrightarrow$ $(x, n) = p$, где $p = (x_0, n)$ – фиксированное число для данной гиперплоскости.

Т8. *Пусть $H = H = x_0 + L$ – линейное аффинное многообразие в евклидовом (унитарном) пр–ве. Тогда $\rho(f, H) = \rho(f - x_0, L)$.*

=> из Т (*Расстояние между вектором f и линейным подпространством L в евклидовом (унитарном) пр–ве равно длине перпендикуляра, опущенного из вектора f на L*) и того, что для $\forall z = x_0 + y \in H$:
$\rho(f, z) = |f - z| = |(f - x_0) - y| = \rho(f - x_0, L)$, где $y \in L$. •

Т 9. *Пусть $H_1 = x_1 + L_1$ и $H_2 = x_2 + L_2$ – линейные аффинные многообразия в евклидовом (унитарном) пр–ве. Тогда $\rho(H_1, H_2) = \rho(x_1 - x_2, L_1 + L_2)$.*

=> из того, что для $\forall z_1 = x_1 + y_1 \in H_1$ и $z_2 = x_2 + y_2 \in H_2$:
$\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)| = \rho(x_1 - x_2, y)$, где $y = y_1 - y_2 \in L_1 + L_2$ •

13. Линейные операторы (ЛО). Матрица ЛО.

V и W – линейные пр–ва над общим P. Отображение $\mathcal{A}: V \to W$ **(1)** называется ***линейным оператором, действующим из V в W***, если для $\forall\, x, y \in V$, $\alpha \in P$
1) $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y$; 2) $\mathcal{A}(\alpha x) = \alpha\mathcal{A}x$.
Если $V = W$, то отображение $\mathcal{A}: V \to V$ называют ***линейным оператором, действующим в V***.
Если $W = P$, то отображение (1) называют ***линейной формой*** *или* ***линейным функционалом в пр–ве V***.
Множество всех ЛО, действующих из V в W: $\mathcal{L}(V, W)$.
ЛО $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$ равны, если $\mathcal{A}x = \mathcal{B}x$, $\forall\, x \in V$.
Пр.1. M_n – пр–во вещественных многочленов степени $\le n$. ЛО *диффер–ния* $\mathcal{D}: M_n \to M_n$, : $\mathcal{D}\,p(t) = p'(t)$.
2. $V = L_1 \oplus L_2$. ЛО *проектирования пр–ва V на L_1 параллельно L_2*: $\mathcal{P}: V \to V$ по правилу $\mathcal{P}x = x_1$ для $x \in V$ с разложением $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$.
ЛО *отражения пр–ва V относительно L_1 параллельно L_2*: $\mathcal{R}: V \to V$ по правилу $\mathcal{R}x = x_1 - x_2$.
3. *Нулевой* ЛО $\mathcal{O}: V \to W$: $\forall\, x \in V$ переводит в $\theta \in W$.
4. *Тождественный* ЛО $\mathcal{I}: V \to V$, $\forall\, x \in V$ переводит в x.
Из определения => св–ва.
1°. *ЛО переводит 0–й вектор в 0–й вектор*, т.к. $\mathcal{A}\theta_1 = \mathcal{A}(0x) = 0\mathcal{A}x = \theta_2$ ($\theta_1 \in V$ и $\theta_2 \in W$).
2°. *ЛО сохраняет линейные комбинации*, т.е. переводит линейную комбинацию векторов в линейную комбинацию образов с теми же коэффициентами:
$$\mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{A}x_i$$
3°. *ЛО сохраняет линейную зависимость*, т.е. переводит линейно зависимую систему в линейно зависимую.
Т1. *Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис пр–ва V, а $q_1, \ldots, q_n$ – произвольные векторы пр–ва W. Тогда ∃ ! ЛО* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, *который переводит векторы $e_1, \ldots, e_n$ в векторы $q_1, \ldots, q_n$ соответственно.*
Док–во. Построим искомый оператор, положив для
$\forall\, x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in V$: $\mathcal{A}x = \sum_{i=1}^n x_i q_i$ **(2)**
Из единственности разложения вектора x по базису => правило (2) однозначно определяет образ вектора x, причем $\mathcal{A}e_i = q_i$, $i = \overline{1,n}$. Из линейности координат => линейность построенного оператора.
Оператор $\mathcal{A}$ единствен, т.к. если $\mathcal{B}$ – ∀ другой ЛО, переводящий векторы $e_1, \ldots, e_n$ в векторы $q_1, \ldots, q_n$, то $\mathcal{B}x = \mathcal{B}(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \mathcal{B}e_i = \sum_{i=1}^n x_i q_i = \mathcal{A}x$, $\forall\, x \in V$ => $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ •
Сл. *ЛО $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$ равны ⇔ они совпадают на векторах базиса V.*
Пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и $f = (f_1, \ldots, f_m)$ – базисы пр–тв V и W. Из Т1 => ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ однозначно определяется заданием векторов $\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n$. Но векторы $\mathcal{A}e_i$, $i = \overline{1,n}$ однозначно определяются своими координатами в базисе f, т.е. коэффициентами разложений
$$\begin{cases} \mathcal{A}e_1 = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 \ldots + a_{m1} f_m, \\ \mathcal{A}e_2 = a_{12} f_1 + a_{22} f_2 \ldots + a_{m2} f_m, \\ \ldots \\ \mathcal{A}e_n = a_{1n} f_1 + a_{2n} f_2 \ldots + a_{mn} f_m \end{cases}$$
Матрица *оператора $\mathcal{A}$ в паре базисов e* и f:
$$A_{fe} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$
Из единственности разложения вектора по базису => при фиксированных e и f матрица ЛО определена однозначно.
Т2. *Пусть* $\dim V = n$, $\dim W = m$. *Тогда ∃ взаимно однозначное соответствие между линейными операторами из $\mathcal{L}(V, W)$ и матрицами из $P^{m\times n}$.*
Док–во. Зафиксируем базисы $e = (e_1,\ldots,e_n)$ и $f = (f_1,\ldots,f_m)$ пр–тв V и W. Поставим в соответствие каждому ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ его матрицу A_{fe} в паре базисов e и f. Матрица $A_{fe} \in P^{m\times n}$ определена однозначно. Это отображение биективно, т.к. оно:
1) сюръективно, т.к. ∀ матрица $B = (b_{ij}) \in P^{m\times n}$ является матрицей ЛО из $\mathcal{L}(V, W)$, переводящего векторы e_j в векторы $\sum_{i=1}^m b_{ij} f_i$, $j = \overline{1,n}$ (в силу Т1 такой оператор ∃);
2) инъективно, ибо различные операторы из $\mathcal{L}(V, W)$ не совпадают на базисных векторах и, значит, имеют разные матрицы. •
Отображение $f: X \to Y$ называется:
– *инъективным*, если из $x_1 \ne x_2$ => $f(x_1) \ne f(x_2)$, т.е. $f(x) = y$ при $\forall\, y \in Y$ имеет не более 1 решения;
– *сюръективным*, если $\mathrm{im}\, f = Y$, т.е. $f(x) = y$ при $\forall\, y \in Y$ имеет хотя бы 1 решение;
– *биективным*, если оно инъективно и сюръективно, т.е. $f(x) = y$ при $\forall\, y \in Y$ имеет единственное решение.

14. Матрица ЛО при переходе к другому базису. Эквивалентность и подобие матриц.

Пусть $e = (e_1,\ldots,e_n)$ и $f = (f_1,\ldots,f_m)$ – базисы пр–ств V и W. Из теоремы (*Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис пр–ва V, $q_1, \ldots, q_n$ – произвольные векторы пр–ва W. Тогда ∃ ! ЛО* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, *который переводит векторы $e_1,\ldots,e_n$ в векторы $q_1, \ldots, q_n$ соответственно*) =>
ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ однозначно определяется заданием векторов $\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n$. Но векторы $\mathcal{A}e_i$, $i = \overline{1,n}$ однозначно определяются своими координатами в базисе f, т.е. коэффициентами разложений
$$\begin{cases} \mathcal{A}e_1 = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 \ldots + a_{m1} f_m, \\ \mathcal{A}e_2 = a_{12} f_1 + a_{22} f_2 \ldots + a_{m2} f_m, \\ \ldots \\ \mathcal{A}e_n = a_{1n} f_1 + a_{2n} f_2 \ldots + a_{mn} f_m \end{cases} \quad (1)$$
Матрица *оператора $\mathcal{A}$ в паре базисов e* и f:
$$A_{fe} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$
Пусть ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, $e = (e_1,\ldots,e_n)$ и $f = (f_1,\ldots,f_m)$ базисы пр–тв V и W.
Т1. *Если $y = \mathcal{A}x$, то* $y_f = A_{fe}x_e$ **(2)**
Док–во. $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^m y_i f_i$, $A_{fe} = (a_{ij})$.
Утверждение (2) ⇔ $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, i = \overline{1,m}$. **(3)**
Докажем их. Имеем $y = \mathcal{A}x = \mathcal{A}(\sum_{j=1}^n x_j e_j) = \sum_{j=1}^n x_j \mathcal{A}e_j = \{$в силу (1)$\} = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right) f_i$. Из единственности разложения вектора y по базису f => (3). •
Пусть e и $t = eC$ – два базиса пр–ва V с матрицей перехода C, а f и $s = fD$ – два базиса пр–ва W с матрицей перехода D. Одному и тому же ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ в паре базисов e и f соответствует матрица A_{fe}, а в паре базисов t и s – матрица A_{st}.
Т2. *Матрицы A_{fe} и A_{st} ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ в различных парах базисов связаны :* $A_{st} = D^{-1}A_{fe}C$ **(4)**
Док–во. Для $\forall\, x \in V$ и его образа $y = \mathcal{A}x$ в силу (2) : $y_f = A_{fe}x_e$ и $y_s = A_{st}x_t$. Т.к. C и D – матрицы перехода, то $x_e = Cx_t$, $y_f = Dy_s$ => $Dy_s = A_{fe}Cx_t$ => $DA_{st}x_t = A_{fe}Cx_t$. Т.к. это соотношение верно для $\forall\, x_t$, то $DA_{st} = A_{fe}C$. В силу невырожденности матрицы перехода => (4). •
2 матрицы A, B называются ***эквивалентными*** ($A \sim B$), если ∃ невырожденные матрицы P и Q : $A = PBQ$.
Квадратные матрицы A, B называются ***подобными***, если ∃ невырожденная матрица Q: $A = Q^{-1}BQ$.
***Сл*1.** *Матрицы ЛО в различных парах базисов эквивалентны.*
***Сл*2.** *Ранг матрицы ЛО не зависит от выбора базисов.*
Т3. 2 *матрицы A и B над полем P одинакового раз–мера m×n эквивалентны ⇔ они являются матрицами одного и того же ЛО* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, *где V и W – линей–ные пр–ва над полем P размерностей n и m соот–но.*
Док–во. Необх–сть. Пусть $A, B \in P^{m\times n}$ и $B = D^{-1}AC$. Рассмотрим ∀ линейные пр–ва V и W над полем P : $\dim V = n$, $\dim W = m$. Возьмем в пр–ве V ∀ базис e, а в пр–ве W – базис f. В силу взаимно однозначного соответствия между $P^{m\times n}$ и $\mathcal{L}(V, W)$ (теорема: *Пусть* $\dim V = n$, $\dim W = m$. *Тогда ∃ взаимно однозначное соответствие между линейными операторами из $\mathcal{L}(V, W)$ и матрицами из $P^{m\times n}$*) ∃ ! ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, который в паре базисов e и f имеет матрицу A => согласно (4) матрица B будет матрицей этого же оператора в паре базисов $t = eC$ и $s = fD$.
Дост–сть рассмотрена в Т2. •
Если $W = V$, то при переходе от базиса e к $f = eQ$ матрица оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ изменяется по закону: $A_f = Q^{-1}A_e Q$. Т.о., одному и тому же ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ соответствует целый класс матриц, подобных друг другу. Из Т3 => две матрицы $A, B \in P^{n\times n}$ подобны ⇔ они являются матрицами одного и того же ЛО, действующего в n–мерном пр–ве над полем P.

15. Линейное пр–во ЛО и матриц.

Суммой линейных операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$ называется отображение $\mathcal{C}: V \to W$ по правилу $\forall\, x \in V$
$\mathcal{C}x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$, $\forall\, x \in V$: $(\mathcal{A} + \mathcal{B})x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$ **(1)**
Произведение линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ ***на число*** $\alpha \in P$ – это отображение $\mathcal{C}: V \to W$ по правилу $\mathcal{C}x = \alpha\mathcal{A}x$, $\forall\, x \in V$: $(\alpha\mathcal{A})x = \alpha\mathcal{A}x$, $\forall\, x \in V$. **(2)**
Т1. *Для ∀ операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$ и числа $\alpha \in P$* : $\mathcal{A} + \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$, $\alpha\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$
Док–во. Для $\forall\, x, y \in V$ согласно (1) имеем
$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(x + y) = \mathcal{A}(x + y) + \mathcal{B}(x + y)$.
В силу линейности $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ и аксиом линейного пр–ва $(\mathcal{A} + \mathcal{B})(x + y) = (\mathcal{A}x + \mathcal{A}y) + (\mathcal{B}x + \mathcal{B}y) = (\mathcal{A}x + \mathcal{B}x) + (\mathcal{A}y + \mathcal{B}y) = (\mathcal{A} + \mathcal{B})x + (\mathcal{A} + \mathcal{B})y$. Ан–но показать, что $(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\lambda x) = \lambda((\mathcal{A} + \mathcal{B})x)$ для $\forall\, x \in V$, $\lambda \in P$ => $\mathcal{A} + \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$
Так же доказывается, что $\alpha\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ •
***С* 1**. *Сложение операторов и умножение оператора на число являются внутренним и внешним законами композиции на множестве* $\mathcal{L}(V, W)$.
Аксиомы линейного пр-ва: $\forall a, b, c \in V$ и $\alpha, \beta \in P$
1. $a + b = b + a$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. $\exists\theta \in V: a + \theta = \theta + a = a$
4. для $\forall a \in V$ $\exists -a \in V: a + (-a) = (-a) + a = \theta$
5. $1 \cdot a = a$
6. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$
7. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
8. $a(a + b) = \alpha a + \alpha b$
Т2. *Множество $\mathcal{L}(V, W)$ – линейное пр–во над полем P относительно введенных выше операций.*
Док–во. Проверить аксиомы линейного пр–ва, 0–ой элемент – 0–ое отображение $\mathcal{O} \in \mathcal{L}(V, W)$, противоположный к $\mathcal{A}$ –отображение $-\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ по правилу $(-\mathcal{A})x = -\mathcal{A}x$, $\forall\, x \in V$. *Ассоциативность.*
Для $\forall\ \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{L}(V, W)$ и $\forall\, x \in V$: $((\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C})x = (\mathcal{A} + \mathcal{B})x + \mathcal{C}x = (\mathcal{A}x + \mathcal{B}x) + \mathcal{C}x = \mathcal{A}x + (\mathcal{B}x + \mathcal{C}x)$,
$(\mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{C}))x = \mathcal{A}x + (\mathcal{B} + \mathcal{C})x = \mathcal{A}x + (\mathcal{B}x + \mathcal{C}x)$ =>
$(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C} = \mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{C})$. •
Пусть $e = (e_1,\ldots,e_n)$ и $f = (f_1,\ldots,f_m)$ – базисы пр–тв V и W. Из Т (*Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис пр–ва V, а $q_1, \ldots, q_n$ – произвольные векторы пр–ва W. Тогда ∃ ! ЛО* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, *который переводит векторы $e_1, \ldots, e_n$ в векторы $q_1, \ldots, q_n$ соответственно*) => ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ однозначно определяется заданием векторов $e_1,\ldots,\mathcal{A}e_n$. Но векторы $\mathcal{A}e_i$, $i = \overline{1,n}$ однозначно определяются своими координатами в f:
$$\begin{cases} Ae_1 = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 \ldots + a_{m1} f_m, \\ Ae_2 = a_{12} f_1 + a_{22} f_2 \ldots + a_{m2} f_m, \\ \ldots \\ Ae_n = a_{1n} f_1 + a_{2n} f_2 \ldots + a_{mn} f_m \end{cases} \quad (3)$$
Матрица *оператора $\mathcal{A}$ в паре базисов e* и f:
$$A_{fe} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{mn} \end{bmatrix} \quad (4)$$
2 линейных пр–ва V_1 и V_2 над общим полем P ***изоморфны*** ($V_1 \cong V_2$), если ∃ биективное отображение $\varphi: V_1 \to V_2$, которое сохраняет законы композиции, т.е. если для $\forall\, x, y \in V_1$ и ∀ числа $\alpha \in P$
1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ 2) $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$.
Т3. *Если* $\dim V = n$, $\dim W = m$, *то линейное пр–во* $\mathcal{L}(V, W)$ *изоморфно пр–ву матриц* $P^{m\times n}$.
Док–во. Зафиксируем базисы e и f пр–тв V и W. Построим отображение $\varphi: \mathcal{L}(V, W) \to P^{m\times n}$, положив $\varphi(\mathcal{A}) = A_{fe}$. Это отображение биективно в силу теоремы (*Пусть* $\dim V = n$, $\dim W = m$. *Тогда ∃ взаимно однозначное соответствие между ЛО из $\mathcal{L}(V, W)$ и матрицами из $P^{m\times n}$*). Покажем, что оно сохраняет законы композиции, т.е. что
$(\mathcal{A} + \mathcal{B})_{fe} = A_{fe} + B_{fe}$, $(\alpha A)_{fe} = \alpha A_{fe}$ **(5)**
Пусть $A_{fe} = (a_{ij})$, $B_{fe} = (b_{ij})$ => согласно (3),
$\mathcal{A}e_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i$, $\mathcal{B}e_j = \sum_{i=1}^m b_{ij} f_i$ =>
$(\mathcal{A} + \mathcal{B})e_j = \mathcal{A}e_j + \mathcal{B}e_j = \sum_{i=1}^m (a_{ij} + b_{ij}) f_i$.
По определению (4) отсюда => 1–е из (5). Ан–но проверяется 2–е соотношение. •
***С*2.** $\dim \mathcal{L}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$

16. Произведение ЛО и его матрица.

Пусть V, W, Z – линейные пр–ва над полем P.
Произведением ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(W, Z)$ называется отображение $\mathcal{C}: V \to Z$ по правилу
$\mathcal{C}x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x)$, $\forall\, x \in V$: $(\mathcal{B}\mathcal{A})x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x)$, $\forall\, x \in V$.
Т1. *Если* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(W, Z)$, *то* $\mathcal{B}\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, Z)$
Док–во. Линейность $\mathcal{B}\mathcal{A}$: для $\forall\, x, y \in V$ *и* $\alpha \in P$
$(\mathcal{B}\mathcal{A})(x+y) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(x+y)) = \mathcal{B}(\mathcal{A}x + \mathcal{A}y) = \mathcal{B}(\mathcal{A}x) + \mathcal{B}(\mathcal{A}y) = \mathcal{B}\mathcal{A}x + \mathcal{B}\mathcal{A}y$,
$(\mathcal{B}\mathcal{A})(\alpha x) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\alpha x)) = \mathcal{B}(\alpha(\mathcal{A}x)) = \alpha\mathcal{B}(Ax) = \alpha(\mathcal{B}\mathcal{A}x) = = (\alpha\mathcal{B}\mathcal{A})x$. •
Произведение ЛО определено не для любой пары ЛО. Но если это произведение имеет смысл, то:
1) $(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C})$ (ассоциативность);
2) $\alpha(\mathcal{A}\mathcal{B}) = (\alpha\mathcal{A})\mathcal{B} = \mathcal{A}(\alpha\mathcal{B})$;
3) $(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{B}\mathcal{C}$, $\mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{C}$ (дистрибутивность).
Пусть $e = (e_1,\ldots,e_n)$ и $f = (f_1,\ldots,f_m)$ – базисы пр–тв V и W. Из Т (*Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис пр–ва V, а $q_1, \ldots, q_n$ – произвольные векторы пр–ва W. Тогда ∃ ! ЛО* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, *который переводит векторы $e_1, \ldots, e_n$ в векторы $q_1, \ldots, q_n$ соответственно*) => ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ однозначно определяется заданием векторов $\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n$. Но $\mathcal{A}e_i$, $i = \overline{1,n}$ однозначно определяются коэффициентами разложений в f:
$$\begin{cases} Ae_1 = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 \ldots + a_{m1} f_m, \\ Ae_2 = a_{12} f_1 + a_{22} f_2 \ldots + a_{m2} f_m, \\ \ldots \\ Ae_n = a_{1n} f_1 + a_{2n} f_2 \ldots + a_{mn} f_m \end{cases} \quad (1)$$
Матрица *оператора $\mathcal{A}$ в паре базисов e* и f:
$$A_{fe} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{mn} \end{bmatrix} \quad (2)$$
Т2. *При умножении ЛО их матрицы умножаются, т.е. если e, f, g – базисы пр–тв V, W, Z, то*
$$(\mathcal{B}\mathcal{A})_{ge} = B_{gf}A_{fe}. \quad (3)$$
Док–во. Пусть $A_{fe} = (a_{ij})$, $B_{gf} = (b_{ij})$, $(\mathcal{B}\mathcal{A})_{ge} = (c_{ij})$, $\dim V = n$, $\dim W = m$, $\dim Z = k$ => в силу (1)
$$\mathcal{B}\mathcal{A}e_j = \sum_{i=1}^k c_{ij} g_i \quad (4)$$
В то же время $\mathcal{B}\mathcal{A}e_j = \mathcal{B}(\mathcal{A}e_j) = \mathcal{B}\left(\sum_{s=1}^m a_{sj} f_s\right) = = \sum_{s=1}^m a_{sj}(\mathcal{B}f_s) = \sum_{s=1}^m a_{sj} \sum_{i=1}^k b_{is} g_i =$
$$= \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^k a_{sj} b_{is} g_i = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{s=1}^m b_{is} a_{sj}\right) g_i$$
Сравнение этого разложения с (4) приводит к равенству $c_{ij} = \sum_{s=1}^m b_{is} a_{sj}$, которое означает (3).

17. Ядро и образ ЛО. Каноническая пара базисов.

Образ $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$: $\operatorname{im} \mathcal{A} = \{y \in W \mid \exists\, x \in V: \mathcal{A}x = y\}$

ядро $\mathcal{A}$: $\ker \mathcal{A} = \{x \in V \mid \mathcal{A}x = \theta\}$

Пр. 1. В пр–ве многочленов M_n для оператора дифференцирования $\mathcal{D}: M_n \to M_n$: $(\mathcal{D}p(t) = p'(t))$: $\operatorname{im} \mathcal{D} = M_{n-1}$, $\ker \mathcal{D} = M_0$.

2. $V = L_1 \oplus L_2$. ЛО *проектирования пр–ва V на* L_1 *параллельно* L_2: $\mathcal{P}: V \to V$ по правилу $\mathcal{P}x = x_1$ для $x \in V$ с разложением $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$.

ЛО *отражения пр–ва V относительно* L_1 *параллельно* L_2: $\mathcal{R}: V \to V$ по правилу $\mathcal{R}x = x_1 - x_2$.

Для оператора проектирования: $\operatorname{im} \mathcal{P} = L_1$, $\ker \mathcal{P} = L_2$

Для оператора отражения: $\operatorname{im} \mathcal{R} = V$, $\ker \mathcal{R} = \{\theta\}$

Т1. *Если* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, *то* $\ker \mathcal{A}$ *– линейное подпространство пр–ва V,* $\operatorname{im} \mathcal{A}$ *– линейное подпространство пр–ва W.*

для док–ва проверить условия Т (*Непустое подмножество L пр–ва V является линейным подпространством этого пр–ва* ⇔ *имеют место импликации:* 1) $a, b \in L \Rightarrow a+b \in L$, 2) $a \in L$, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha a \in L$).

Ранг ЛО – размерность его образа, ***дефект*** – размерность ядра: $\operatorname{rg} \mathcal{A} = \dim \operatorname{im} \mathcal{A}$, $\operatorname{def} \mathcal{A} = \dim \ker \mathcal{A}$

Т2. *Если* $e_1, \dots, e_n$ *– базис пр–ва V, то*

$$\operatorname{im} \mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) \quad \textbf{(1)}$$

Док–во. Для множеств (1) 2–стороннее вложение:

1)если $y \in \operatorname{im} \mathcal{A}$, то $y = \mathcal{A}x$ для некоторого $x \in V$, т.е. $y = \mathcal{A}(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \mathcal{A}e_i \in \mathcal{L}(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n)$

2)если $y \in \mathcal{L}(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n)$, то $y = \sum_{i=1}^n x_i \mathcal{A}e_i = \mathcal{A}(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \mathcal{A}x$, т.е. $y \in \operatorname{im} \mathcal{A}$. •

Т3. *Ранг ЛО равен рангу его матрицы в произвольной паре базисов.*

Док–во. Из Т2 и из $\dim \mathcal{L}(a_1, \dots, a_k) = \operatorname{rg}(a_1, \dots, a_k) \Rightarrow$ $\operatorname{rg} \mathcal{A} = \dim \operatorname{im} \mathcal{A} = \dim \mathcal{L}(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = \operatorname{rg}(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n)$

Ранг системы векторов $\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n$ = рангу системы векторов, составленных из координат этих векторов в базисе f пр–ва W, т.е. рангу системы столбцов матрицы A_{fe} •

Т4 (о ранге и дефекте). *Если* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, *то*

$$\operatorname{rg} \mathcal{A} + \operatorname{def} \mathcal{A} = \dim V. \quad \textbf{(2)}$$

Док–во. Пусть $e_1, \dots, e_k$ – базис $\ker \mathcal{A}$. Дополним его до базиса $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ пр–ва V. Согласно Т2 $\operatorname{im}\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_k, \mathcal{A}e_{k+1}, \dots, \mathcal{A}e_n) = \mathcal{L}(\mathcal{A}e_{k+1}, \dots, \mathcal{A}e_n)$

Докажем, что $\mathcal{A}e_{k+1}, \dots, \mathcal{A}e_n$ линейно независимы. Пусть это не так => для нетривиальной линейной комбинации этих векторов:

$\alpha_{k+1}\mathcal{A}e_{k+1} + \dots + \alpha_n\mathcal{A}e_n = \theta \Rightarrow \mathcal{A}(\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n) = \theta \Rightarrow \alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n \in \ker \mathcal{A} \Rightarrow$ вектор $\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n$ линейно выражается через $e_1, \dots, e_k$, что невозможно в силу линейной независимости $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$. Т.о., $\dim \operatorname{im} \mathcal{A} = n - k$, $\dim \ker \mathcal{A} = k \Rightarrow$ (2). •

Т5. *Пусть* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, $\operatorname{rg} \mathcal{A} = r$, $\dim V = n$, $\dim W = m$. *Тогда* ∃ *базисы e и f пр–тв V и W, в которых оператор* $\mathcal{A}$ *имеет матрицу* $I_r \in P^{m \times n}$, *в которой все элементы равны* 0, *кроме первых r диагональных элементов, равных* 1.

Док–во. Возьмем ∀базисы t и s пр–тв V и W. Пусть A_{st} – матрица оператора $\mathcal{A}$ в паре базисов t и s => по Т3 $\operatorname{rg} A_{st} = r$. В силу теоремы (*Любая ненулевая матрица ранга r эквивалентна матрице* I_r) => матрицы A_{st} и I_r эквивалентны => по теореме (*Две матрицы A и B над полем P одинакового размера m×n эквивалентны* ⇔ *они являются матрицами одного и того ЛО* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, *где V и W – линейные пр–ва над полем P размерностей n и m соответственно.*) они являются матрицами одного ЛО => утверждение теоремы. •

Базисы e и f, в которых оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу I_r, называют ***канонической парой базисов***.

18. Линейные функционалы. Сопряженное пр–во. Линейные функционалы и гиперплоскости.

Линейное отображение $f: V \to P$ линейного пр–ва V над полем P в это поле называется ***линейным функционалом*** в пр–ве V.

Пр. 1. Простейший линейный функционал в пр–ве V – отображение $f: V \to P$: $f(x) = 0$, где $0 \in P$.

2. Отображение $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по правилу: если $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, то $f(x) = x_1$.

3. В пр–ве M_n вещественных многочленов степени $\le n$ линейным функционалом является отображение $f: M_n \to \mathcal{R}$ по правилу: если $p(t) \in M_n$, то $f(p) = p(1)$.

Если $e_1, \dots, e_n$ – базис пр–ва V, то линейный функционал $f \in \mathcal{L}(V, P)$, однозначно определяется числами $\alpha_1 = f(e_1), \dots, \alpha_n = f(e_n)$. Для $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ в силу линейности f: $f(x) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ **(1)**

(1) – ***общий вид линейного функционала*** *f в базисе* $e_1, \dots, e_n$. Числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – ***коэффициенты линейного функционала*** *f в базисе* $e_1, \dots, e_n$.

Мн–во $\mathcal{L}(V, P)$ всех линейных функционалов в линейном пр–ве V образует линейное пр–во относительно операций сложения и умножения на число: $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

Линейное пр–во всех линейных функционалов на пр–ве V называется ***сопряженным пр–вом*** V^* ***к пр–ву V***.

Т1. $\dim V^* = \dim V$.

=> из Т (*Если* $\dim V = n$, $\dim W = m$, *то линейное пр–во* $\mathcal{L}(V, W)$ *изоморфно пр–ву матриц* $P^{m \times n}$) и ее следствия ($\dim \mathcal{L}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$), т.к. $\dim P = 1$

Сл. *Всякое конечномерное линейное пр–во изоморфно своему сопряженному.*

=> из Т (2 *линейных пр–ва над общим полем изоморфны* ⇔ *их размерности совпадают*).

Т2. *Для ∀ линейного функционала f в евклидовом (унитарном) пр–ве V* ∃ ! *вектор* $h \in V$:

$$f(x) = (x, h), \forall x \in V.$$

Док–во. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – ОНБ пр-ва V и $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – коэффициенты f в этом базисе => вектор $h = \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i} e_i$ будет искомым в силу (1) и (*В евклидовом (унитарном) пр–ве скалярное произведение векторов* $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, *заданных своими координатами в базисе e, вычисляется по правилу* $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i$ ⇔ *e* – ОНБ). Пусть еще вектор h_1 удовлетворяет требованиям теоремы => $(x, h_1) = (x, h)$, $\forall x \in V$, т.е. $(x, h_1 - h) = 0$, $\forall x \in V$. Т.к. $h_1 - h \in V \Rightarrow h_1 - h = \theta \Rightarrow h$ – единственный •

Пусть $L = \ker f$. Если $L = V$, то $f \equiv 0$ (0–й или тривиальный).

Пусть $L \ne V$. Тогда ∃ вектор x_0 : $f(x_0) \ne 0$. Для $\forall x \in V$ находим: $f(x - \alpha x_0) = 0$ при $\alpha = f(x) / f(x_0) \Rightarrow$ $x = z + \alpha x_0$, $z \in L$. α однозначно определяется условием $z \in L \Rightarrow V = L \oplus L(x_0) \Rightarrow \dim L^{\perp} = 1$.

Рассмотрим $M_c = \{x \in V : f(x) = c\}$. Если $f(x_0) = c$, то, $M_c = x_0 + L$. Т.о., M_c – линейное многообразие с направляющим пр–вом L, у которого дополнительное пр–во имеет размерность 1. В таких случаях линейное многообразие называется *гиперплоскостью.*

Отображение $f(x) \to M(f) = \{x \in V : f(x) = 1\}$ является взаимно–однозначным соответствием между линейными функционалами и гиперплоскостями.

Пусть $\dim V = n$ и $e_1, \dots, e_n$ – базис в V => ∀ линейный функционал имеет вид:

$$f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n, \text{ где } c_i = f(e_i).$$

Т.о., ∀ гиперплоскость в n–мерном пр–ве имеет вид $c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = c$, где $x_1, \dots, x_n$ – координаты разложения вектора по выбранному базису.

19. Обратный оператор и критерий обратимости.

Отображение $f: X \to Y$ называется:

– *инъективным,* если из $x_1 \ne x_2 \Rightarrow f(x_1) \ne f(x_2)$;

– *сюръективним,* если $\operatorname{im} f = Y$;

– *биективным,* если оно инъективно + сюръективно, т.е. $f(x) = y$ при $\forall y \in Y$ имеет единственное решение.

Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$. Отображение $\mathcal{A}^{-1}: V \to V$ называет ***обратным оператором*** к оператору $\mathcal{A}$, если

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{I}, \quad \textbf{(1)}$$

тождественный ЛО $\mathcal{I}: V \to V$, $\forall x \in V$ переводит в x

Т1. *ЛО* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ *обратим* ⇔ *он биективен.*

Док–во. 1)*Необх–сть*. Пусть $\mathcal{A}$ обратим, докажем его биективность. Если он не инъективен, то $\exists\, x_1, x_2 \in V$: $x_1 \ne x_2$ и $\mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \Rightarrow x_1 = \mathcal{I}x_1 = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}(x_1) = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}x_1) = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}x_2) = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}(x_2) = \mathcal{I}x_2 = x_2$.

Пусть $\forall x \in V \Rightarrow x = \mathcal{I}x = \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}(x) = \mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}x) = \mathcal{A}y$, $y \in V \Rightarrow \mathcal{A}$ – сюръективен => он биективен.

2)*Дост–сть*. Пусть $\mathcal{A}$ – биективен, тогда для $\forall y \in V$ ∃ ! прообраз $x \in V$ ($\mathcal{A}x = y$). Построим отображение $\mathcal{A}^{-1}: V \to V$, положив $\mathcal{A}^{-1}y = x \Rightarrow$ для $\forall y \in V$ имеем: $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}(y) = \mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}y) = \mathcal{A}x = y \Rightarrow \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{I}$. А для $\forall x \in V$ имеем: $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}x) = \mathcal{A}^{-1}y = x \Rightarrow \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{I} \Rightarrow (1) \Rightarrow \mathcal{A}$ обратим.

Т2. *Обратный оператор единствен.*

Док–во. Пусть $\mathcal{A}_1^{-1}$ *и* $\mathcal{A}_2^{-1}$ – 2 обратных оператора к $\mathcal{A}$ $\Rightarrow \mathcal{A}_1^{-1} = \mathcal{A}_1^{-1}\mathcal{I} = \mathcal{A}_1^{-1}(\mathcal{A}\mathcal{A}_2^{-1}) = (\mathcal{A}_1^{-1}\mathcal{A})\mathcal{A}_2^{-1} = \mathcal{I}\mathcal{A}_2^{-1} = \mathcal{A}_2^{-1}$

Т3. *Обратный оператор линеен.*

Док–во. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$. Покажем, что обратный оператор $\mathcal{A}^{-1}$, если он ∃, является ЛО, действующим в пр–ве V. $\mathcal{A}$ обратим => он биективен и сюръективен => для $\forall y_1, y_2 \in V\ \exists\, x_1, x_2 \in V$: $y_1 = \mathcal{A}x_1$, $y_2 = \mathcal{A}x_2$.

Т.к. $x_1 = \mathcal{A}^{-1}y_1$, $x_2 = \mathcal{A}^{-1}y_2 \Rightarrow \mathcal{A}^{-1}(y_1 + y_2) = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}x_1 + \mathcal{A}x_2) = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}(x_1 + x_2) = x_1 + x_2 = \mathcal{A}^{-1}y_1 + \mathcal{A}^{-1}y_2$.

Ан–но, $\mathcal{A}^{-1}(\alpha y_1) = \mathcal{A}^{-1}(\alpha \mathcal{A}x_1) = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}(\alpha x_1) = \alpha x_1 = \alpha\mathcal{A}^{-1}y_1$, $\forall \alpha \in P$ •

Т4. *Матрица обратного оператора* $\mathcal{A}^{-1}$ *в произвольном базисе является обратной к матрице оператора* $\mathcal{A}$ *в этом же базисе.*

Док–во. Пусть e – ∀ базис пр–ва V и для оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ ∃ обратный оператор $\mathcal{A}^{-1}$. Перейдем в равенствах (1) к матрицам операторов в базисе e. По Т (*При умножении ЛО их матрицы умножаются, т.е. если e, f, g – базисы пр–тв V, W, Z, то* $(\mathcal{B}\mathcal{A})_{ge} = B_{gf}A_{fe}$ **(2)**) получим, что $A_e(\mathcal{A}^{-1})_e = (\mathcal{A}^{-1})_e A_e = I$. Эти равенства совпадают с определением обратной матрицы для A_e. Т.о., $(A_e)^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})_e$ •

Оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ ***невырожденным***, если его ядро состоит только из 0–го вектора: $\ker \mathcal{A} = \{\theta\}$, и ***вырожденный*** в противном случае.

Т5. *В конечномерном пр–ве V следующие утверждения равносильны: для* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$

1) $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{I}$	5) $\det \mathcal{A} \ne 0$
2) $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{I}$	6) $\mathcal{A}$ *обратим;*
3) $\mathcal{A}$ *не вырожден*	7) $\mathcal{A}$ *биективен.*
4) $\operatorname{im} \mathcal{A} = V$	

Док–во. **1 ⇔ 2 ⇔ 5 ⇔ 6 ⇔ 7**. Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ – ∀ базис пр–ва V. В силу (2) У1 ⇔ $A_e(\mathcal{A}^{-1})_e = I$ ⇔ с учетом теоремы о единственности обратной матрицы $A_e(A_e)^{-1} = (A_e)^{-1}A_e = I$, эквивалентным (в силу (2)) равенствам (1) и (по Т (*Матрица обратима* ⇔ *она не вырождена*)) условию $\det A_e \ne 0$. Это доказывает 1 ⇔ 5, 1 ⇔ 2, 1 ⇔ 6 и, согласно Т1, 1 ⇔ 7.

1 ⇔ 3 ⇔4. У1 в силу $\det A_e \ne 0$ ⇔$\operatorname{rg} \mathcal{A} = n \Rightarrow$ в силу ($\operatorname{rg} \mathcal{A} + \operatorname{def} \mathcal{A} = \dim V$) $\operatorname{def} \mathcal{A} = 0$. $\operatorname{rg} \mathcal{A} = n \Rightarrow \dim \operatorname{im} \mathcal{A} = \dim V \Rightarrow \operatorname{im} \mathcal{A} = V$ по Т о монотонности размерности (*Размерность линейного подпространства не превосходит размерности пр–ва. Подпространство той же размерности, что и все пр–во, совпадает с пр–ом.*). Это доказывает 1 ⇔ 4. $\operatorname{def} \mathcal{A} = 0 \Rightarrow \dim \ker \mathcal{A} = 0$. Это доказывает 1 ⇔ 3. •

Т6. *Произведение обратимых операторов обратимо, при этом* $(\mathcal{A}\mathcal{B})^{-1} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{-1}$.

Док–во. Докажем, что произведение обратимых операторов биективно. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, V)$ – обратимы => они инъективны и сюръективны. Из инъективности => для $\forall x_1, x_2 \in V$: $x_1 \ne x_2 \Rightarrow \mathcal{A}x_1 \ne \mathcal{A}x_2 \Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{A}x_1) \ne \mathcal{B}(\mathcal{A}x_2) \Rightarrow (\mathcal{B}\mathcal{A})x_1 \ne (\mathcal{B}\mathcal{A})x_2$. Из сюръективности => для $\forall z \in V\ \exists\, y \in V$: $z = \mathcal{B}y$, но для этого $y\ \exists\, x \in V$: $y = \mathcal{A}x \Rightarrow \forall z \in V\ \exists\, x \in V$: $z = \mathcal{B}\mathcal{A}x \Rightarrow$ оператор $\mathcal{B}\mathcal{A}$ биективен => обратим.

$(\mathcal{A}\mathcal{B})(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{-1}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{B}^{-1})\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{I}$.

$(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{-1})(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \mathcal{B}^{-1}(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A})\mathcal{B} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{B} = \mathcal{I}$. •

***С*1.** *Умножение ЛО является алгебраической операцией на множестве всех обратимых операторов, действующих в пр–ве V.*

20. Собственные значения и векторы. Операторы простой структуры и диагонализуемые матрицы.

Пусть V – линейное пр–во над полем P. Ненулевой вектор $x \in V$ называется ***собственным вектором оператора*** $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, если $\exists\, \lambda \in P$: $\mathcal{A}x = \lambda x$. **(1)**

Число λ – ***собственное значение оператора*** $\mathcal{A}$***, соответствующее собственному вектору x***. Множество всех собственных значений оператора A – ***спектр*** оператора.

Из определения => если x – собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению λ, то $\forall\, \alpha x$, где $\alpha \ne 0$, также будет собственным вектором оператора $\mathcal{A}$, отвечающим тому же собственному значению λ => ∀ собственный вектор порождает 1–мерное подпространство собственных векторов, из которого исключен вектор θ.

Т1. *Собственные векторы* $x_1, \dots, x_k$ *оператора, отвечающие различным собственным значениям* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, *линейно независимы.*

Док–во. Индукция по k. Для $k = 1$ верно, т. к. собственный вектор ненулевой по определению. Пусть верно для ∀ системы из $k - 1$ векторов. Докажем для k векторов $x_1, \dots, x_k$. Пусть $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k = \theta$ **(2)**

Под действием $\mathcal{A}$: $\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k x_k = \theta$ **(3)**.

(3)– $\lambda_k \cdot$(2) : $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)x_1 + \dots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)x_{k-1} = \theta$

Из индуктивного предположения => $\alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = 0 \Rightarrow \alpha_k x_k = \theta$. Т.к. $x_k \ne \theta$, то $\alpha_k = 0 \Rightarrow$ в (2) все $\alpha_i = 0 \Rightarrow x_1, \dots, x_k$ линейно независимы. •

С1. *ЛО, действующий в n–мерном пр–ве, не может иметь более чем n различных собственных значений.*

ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ называется ***оператором простой структуры***, если в пр–ве V ∃ базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

Т2. *ЛО* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ *имеет простую структуру* ⇔ *в пр–ве V* ∃ *базис, в котором он имеет диагональную матрицу.*

Док–во. Пусть $\dim V = n$. Из определения => оператор $\mathcal{A}$ имеет простую структуру ⇔ он имеет n линейно независимых собственных векторов $e_1, \dots, e_n$ ⇔ ∃ базис $e_1, \dots, e_n$, в котором матрица оп–ра $\mathcal{A}$ имеет вид

$$A_e = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & \dots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \textbf{(4)}$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные значения, соответствующие собственным векторам $e_1, \dots, e_n$. •

С2. *В n–мерном пр–ве ЛО, имеющий n различных собственных значений, является оператором простой структуры.*

В соответствии с (4) оператор простой структуры называют ***диагонализуемым оператором***.

Пусть λ_0 – собственное значение оператора $\mathcal{A}$. Множество $W_{\lambda 0} = \{x \in V \mid \mathcal{A}x = \lambda_0 x\}$ называется ***собственным подпространством оператора*** $\mathcal{A}$, отвечающим собственному значению λ_0.

Размерность собственного подпространства $W_{\lambda 0}$ – ***геометрическая кратность собственного значения*** λ_0, а кратность λ_0 как корня характеристического многочлена – его ***алгебраическая кратность***.

Т3. *ЛО* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ *имеет простую структуру* ⇔ *все его собственные подпространства в прямой сумме дают все пр–во V:* $W_{\lambda 1} \oplus \dots \oplus W_{\lambda P} = V$ **(5)**

Док–во. Необх–ть. Пусть $\mathcal{A}$ имеет простую структуру => в пр–ве V ∃ базис $e_1, \dots, e_n$, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Каждый вектор этого базиса принадлежит некоторому собственному пространству $W_{\lambda K}$ => $W_{\lambda 1} + \dots + W_{\lambda P} = V$. Но эта сумма является прямой в силу теоремы (*Сумма собственных подпространств оператора, отвечающих различным собственным значениям, является прямой суммой.*).

Дост–ть вытекает из критерия прямой суммы : совокупность базисов собственных подпространств $W_{\lambda 1}, \dots, W_{\lambda P}$ образует базис V => пр–во V имеет базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. •

З1. На основании критерия прямой суммы условие (5) ⇔ $\dim W_{\lambda 1} + \dots + \dim W_{\lambda P} = \dim V$ **(6)**

Т4. *ЛО, действующий в комплексном пр–ве, имеет простую структуру* ⇔ *для каждого собственного значения этого оператора геометрическая кратность совпадает с алгебраической.*

Док–во. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, где $\lambda_i \ne \lambda_j$ при $i \ne j$, – все различные собственные значения ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ и пусть m_k и s_k, $k = \overline{1, p}$ – алгебраические и геометрические кратности λ_k. Т.к. V – комплексное пр–во, то $\dim V = m_1 + \dots + m_p$.

Но $0 < \dim W_{\lambda K} = s_k \le m_k$, $k = \overline{1, p} \Rightarrow$ (6) возможно ⇔ $s_k = m_k$, $k = \overline{1, p}$ •

Ненулевой вектор–столбец $x \in P^n$ называется ***собственным вектором матрицы*** $A \in P^{n \times n}$, если $\exists\, \lambda \in P$: $Ax = \lambda x$. Число λ называется ***собственным значением матрицы*** A, соответствующим собственному вектору x. Если $e = (e_1, \dots, e_n)$ – ∀ базис пр–ва V, то для $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$: $\mathcal{A}x = \lambda x$ ⇔ $A_e x_e = \lambda x_e$ **(7)** => собственные значения ЛО $\mathcal{A}$ и его матрицы в ∀ базисе $e = (e_1, \dots, e_n)$ совпадают, а собствен–ные векторы матрицы A_e являются координатными столбцами собственных векторов оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Характеристические многочлены оператора и его матрицы совпадают по определению.

Квадратная матрица $A \in P^{n \times n}$ называется ***матрицей простой структуры***, если она имеет n линейно независимых собственных векторов. Из (7) => ЛО является оператором простой структуры ⇔ его матрица в ∀ базисе имеет простую структуру.

Т5. *Квадратная матрица является матрицей простой структуры* ⇔ *она подобна диагональной.*

Док–во. Пусть $A \in P^{n \times n}$ – заданная матрица. Рассмотрим ∀ линейное пр–во V над P размерности n. Зафиксируем в пр–ве V ∀ базис f. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ – ЛО, матрица которого в базисе f совпадает с A, так что $A = A_f$ (такой оператор ∃ по Т (*Пусть* $\dim V = n$, $\dim W = m$. *Тогда* ∃ *взаимно однозначное соответствие между ЛО из* $\mathcal{L}(V, W)$ *и матрицами из* $P^{m \times n}$)). Матрица $A = A_f$ имеет простую структуру ⇔ $\mathcal{A}$ – оператор простой структуры ⇔ по Т2 ∃ базис e, в котором оператор $\mathcal{A}$ имеет диагональную матрицу (4) => A имеет простую структуру ⇔ она и диагональная матрица (4) являются матрицами одного ЛО. При переходе от базиса e к базису $f = eQ$ матрица оператора изменяется по закону $A_f = Q^{-1} A_e Q$. Это равносильно их подобию. •

21. Характеристический многочлен ЛО. Условие существования собственных значений.

Характеристическим многочленом матрицы $A \in P^{n\times n}$ называется функция $f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, $\lambda \in P$ **(1)**

Т1. *Характеристический многочлен* (1) *матрицы* $A \in P^{n\times n}$ *является многочленом* n*–й степени от переменной* λ *над полем* P.

Док–во. Пусть $A = (a_{ij}) \in P^{n\times n}$ =>

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

∀ элемент матрицы $A - \lambda I$ – это многочлен от λ степени ≤ 1 => ∀ член $\det(A - \lambda I)$ – это многочлен от λ степени $\le n$ => $f(\lambda)$ – многочлен от λ, степень которого $\le n$. Покажем, что степень $f(\lambda)$ в точности $= n$. Все члены $\det(A - \lambda I)$ отличные от $(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\dots(a_{nn}-\lambda)$, имеют степень, $\le n-2$, => в $f(\lambda)$ слагаемые, содержащие λ^{n-1} и λ^n, определяются только членом $(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\dots(a_{nn}-\lambda)$, который по формулам Виета имеет вид :

$(-\lambda)^n + (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})(-\lambda)^{n-1} + g_{n-2}(\lambda)$, где $g_{n-2}(\lambda)$ – многочлен от λ степени не выше $n-2$. Т.о.,

$f(\lambda) = a_0 + a_1(-\lambda) + a_2(-\lambda)^2 + \dots + a_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + (-\lambda)^n$ **(2)**

является многочленом n–й степени от λ над полем P. •

З1. $a_{n-1} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$, $a_0 = f(0) = \det A$ => в (2) $a_0 = \det A$, $a_{n-1} = \operatorname{tr} A$. **(3)**

Т2. *Характеристические многочлены подобных матриц совпадают.*

Док–во. Если матрицы A и B подобны, т.е. ∃ невырожденная матрица Q: $A = Q^{-1}BQ$, то

$|A - \lambda I| = |Q^{-1}BQ - \lambda I| = |Q^{-1}BQ - Q^{-1}\lambda I Q| = |Q^{-1}(B - \lambda I)Q| = |B - \lambda I|$ •

Сл. *Все матрицы одного и того же ЛО имеют одинаковые характеристические многочлены.*

Характеристическим многочленом оператора называется функция $f(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})$, $\lambda \in P$

Т.к. все матрицы одного и того же ЛО имеют одинаковый определитель, равный определителю матрицы ЛО в произвольном базисе ($\det \mathcal{A} = \det A_e$), то характеристический многочлен оператора совпадает с характеристическим многочленом матрицы этого оператора в ∀ базисе. Из следствия и 2–го равенства (3) => след матрицы A_e ЛО $\mathcal{A}$ не зависит от выбора базиса e => ***след оператора*** : $\operatorname{tr}\mathcal{A} = \operatorname{tr} A_e$

Линейное подпространство L пр–ва V называется ***инвариантным подпространством относительно оператора*** $\mathcal{A}$, если для $\forall x \in L : \mathcal{A}x \in L$. . Пусть L – подпространство, инвариантное относительно опе–ратора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$. Отображение $\mathcal{A}\,|\,L : L \to L$, определенное равенством $(\mathcal{A}\,|\,L)x = \mathcal{A}x$, $\forall x \in L$, называется ***индуцированным оператором, порожденным оператором*** $\mathcal{A}$ или ***сужением оператора*** $\mathcal{A}$ ***на L.***

Т3. *Характеристический многочлен индуцированного оператора является делителем характеристи–ческого многочлена порождающего оператора.*

=> из теорем (*) и (**) •

Т4. *Если* $V = L_1 \oplus \dots \oplus L_k$ *– прямая сумма подпро–странств* $L_1, \dots, L_k$, *инвариантных относительно оператора* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, *то характеристический многочлен* $f(\lambda)$ *оператора* $\mathcal{A}$ *равен произведению характеристических многочленов* $f_1(\lambda), \dots, f_k(\lambda)$ *индуцированных операторов* $\mathcal{A}\,|\,L_1, \dots, \mathcal{A}\,|\,L_k$:

$$f(\lambda) = f_1(\lambda)\dots f_k(\lambda) \qquad \textbf{(4)}$$

=> из теоремы (**) •

Т5. *Пусть* V *– линейное пр–во над* P. *Число* $\lambda \in P$ *является собственным значением ЛО* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ ⇔ λ *– корень его характеристического многочлена.*

Док–во. По определению число λ является собственным значением оператора $\mathcal{A}$ ⇔ ∃ вектор x:

$$\begin{cases} \mathcal{A}x = \lambda x, \\ x \ne \theta, \\ \lambda \in P \end{cases} <=> \begin{cases} (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})x = \theta, \\ x \ne \theta, \\ \lambda \in P \end{cases}$$

⇔ вырожденность оператора $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}$ при некотором $\lambda \in P$ или $\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = 0$ при некотором $\lambda \in P$ => число λ является собственным значением оператора $\mathcal{A}$ ⇔ оно является корнем характеристического многочлена оператора $\mathcal{A}$, $\lambda \in P$. •

$\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = 0$ – ***характеристическое уравнение*** для оператора $\mathcal{A}$.

Не во всяком поле многочлены имеют корни. Но в алгебраически замкнутом поле ℂ комплексных чисел ∀ многочлен степени $n \ge 1$ с учетом кратности имеет n корней => в соответствии с Т5 =>

Т6. *Произвольный ЛО, действующий в* n*–мерном комплексном пространстве, имеет:*

1) n собственных значений, если каждое собственное значение считать столько раз, какова его кратность как корня характеристического многочлена;

2) хотя бы 1 собственный вектор;

3) на ∀ своем инвариантном подпространстве хотя бы 1 собственный вектор (=> из того, что индуци–рованный оператор, как и ∀оператор, действующий в комплексном пр–ве, имеет собственный вектор, явля–ющийся собственным вектором основного оператора.

З2. Т6 справедлива в вещественном пр–ве для тех операторов, чьи характеристические многочлены имеют только вещественные корни.

***** *Пусть* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ *и* L *– инвариантное подпро–странство относительно* $\mathcal{A}$. *Тогда ∃ базис пр–ва* V, *в котором матрица оператора* $\mathcal{A}$ *имеет квазитреугольную форму.*

****** *Если пр–во* V *является прямой суммой подпро–странств* $L_1, \dots, L_k$, *инвариантных относительно оператора* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, *то в пр–ве* V *∃ базис, в котором матрица оператора* $\mathcal{A}$ *имеет квазидиагональную форму* $A_e = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ & & \dots \\ 0 & & A_k \end{bmatrix}$, *где матрицы* $A_1, \dots, A_k$ *являются матрицами индуцированных операторов* $\mathcal{A}_1\,|\,L, \dots, \mathcal{A}_k\,|\,L$ *в базисах инвариантных подпространств* $L_1, \dots, L_k$

22. Собственное подпространство. Геометрическая и алгебраическая кратности собств. значений.

Пусть V – линейное пр–во над полем P. Линейное подпространство L пр–ва V называется ***инвариант-ным подпространством относительно оператора*** $\mathcal{A}$, если для $\forall x \in L : \mathcal{A}x \in L$. . Пусть L – подпространство, инвариантное относительно оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$. Отображение $\mathcal{A}\,|\,L : L \to L$, определенное равенством $(\mathcal{A}\,|\,L)x = \mathcal{A}x$, $\forall x \in L$, называется ***индуцированным оператором, порожденным оператором*** $\mathcal{A}$ или ***сужением оператора*** $\mathcal{A}$ ***на L.*** Ненулевой $x \in V$ называется ***собственным вектором оператора*** $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, если $\exists \lambda \in P$: $\mathcal{A}x = \lambda x$. **(1)**

Число λ называется ***собственным значением оператора*** $\mathcal{A}$, ***соответствующим собственному вектору x***. Множество всех собственных значений оператора A называется ***спектром*** этого оператора.

Пусть λ_0 – собственное значение оператора $\mathcal{A}$.

Множество $W_{\lambda 0} = \{x \in V \mid \mathcal{A}x = \lambda_0 x\}$ **(2)**

называется ***собственным подпространством опе–ратора*** $\mathcal{A}$, отвечающим собственному значению λ_0.

$W_{\lambda 0} = \ker(\mathcal{A} - \lambda_0\mathcal{I})$ => собственное подпространство является линейным подпространством пр–ва V. Из (2) => собственное подпространство $W_{\lambda 0}$ состоит из 0–го вектора θ и всех собственных векторов, отвечающих λ_0. Собственное подпространство инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$. Размерность собственного подпространства $W_{\lambda 0}$ называется ***геометрической кратностью собственного значения*** λ_0, а кратность λ_0 как корня характеристического многочлена называется его ***алгебраической кратностью***.

Т1. *Геометрическая кратность собственного зна–чения не превосходит его алгебраической кратности.*

Док–во. Пусть m и s – алгебраическая и геометри-ческая кратности собственного значения λ_0 оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$. Собственное подпространство $W_{\lambda 0}$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$ => можно рассматривать индуцированный оператор $\mathcal{A}\,|\,W_{\lambda 0}$. Найдем его характеристический многочлен $f_1(\lambda)$. Пусть $e_1, \dots, e_s$ – базис $W_{\lambda 0}$ => согласно (2) матрицей оператора $\mathcal{A}\,|\,W_{\lambda 0}$ в этом базисе будет диагональная матрица s–го порядка с элементами λ_0 на главной диагонали => $f_1(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^s$. По теореме (*Характеристический многочлен индуцированного оператора является делителем характеристического многочлена порождающего оператора*), $(\lambda_0 - \lambda)^s$ – делитель характеристического многочлена $f(\lambda)$ оператора $\mathcal{A}$, но $(\lambda_0 - \lambda)$ входит в характеристический многочлен $f(\lambda)$ ровно m раз. Значит, $s \le m$. •

Т2. *Сумма собственных подпространств оператора, отвечающих различным собственным значениям, является прямой суммой.*

Док–во. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ – попарно различные собст-венные значения оператора $\mathcal{A}$ => для собственных подпространств $W_{\lambda 1}, \dots, W_{\lambda P}$ выполнено условие прямой суммы: ∀ система ненулевых векторов, взятых по одному из каждого $W_{\lambda K}$, линейно независима как система собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям (теорема: *Собственные векторы* $x_1, \dots, x_k$ *оператора, отвечающие различным собственным значениям* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, *линейно независимы*). •

23. Инвариантность подпространства. Сужение оператора.

Пусть V – линейное пр–во над полем P и $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$. Линейное подпространство L пр–ва V называется ***инвариантным подпространством относительно оператора*** $\mathcal{A}$, если для $\forall x \in L : \mathcal{A}x \in L$.

Пр. 1. Тривиальные подпространства $\{\theta\}$ и V инвари-антны относительно ∀ оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$.

2. Для ∀ ЛО $\mathcal{A}$ инвариантные подпространства: $\ker\mathcal{A}$ и $\operatorname{im}\mathcal{A}$, т.к. если $\mathcal{A}x = \theta$, то $\mathcal{A}(\mathcal{A}x) = \mathcal{A}\theta = \theta$, и если $y = \mathcal{A}x$, то $\mathcal{A}y = \mathcal{A}(\mathcal{A}x) = \mathcal{A}x_1$, где $x_1 = \mathcal{A}x$.

3. Для оператора дифференцирования ($\mathcal{D}$: $M_n \to M_n$: $\mathcal{D}\,p(t) = p'(t)$) в пространстве M_n вещественных многочленов инвариантными подпространствами являются все подпространства $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$.

Т1. *Пусть* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ *и* L *– инвариантное подпро–странство относительно* $\mathcal{A}$. *Тогда ∃ базис пр–ва* V, *в котором матрица оператора* $\mathcal{A}$ *имеет квазитреугольную форму.*

Док–во. Пусть $e_1, \dots, e_k$ – базис L. Дополним его до базиса $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ пр–ва V. Построим матрицу оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Из инвариантности L => $\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_k \in L$ => векторы $\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_k$ линейно выражаются только через $e_1, \dots, e_k$ =>

$$\begin{cases} \mathcal{A}e_1 = a_{11}e_1 + \dots + a_{k1}e_k, \\ \dots \\ \mathcal{A}e_k = a_{1k}e_1 + \dots + a_{kk}e_k \\ \mathcal{A}e_{k+1} = a_{1,k+1}e_1 + \dots + a_{n,k+1}e_n, \\ \dots \\ \mathcal{A}e_n = a_{1n}e_1 + \dots + a_{nn}e_n \end{cases} \qquad (\mathbf{1})$$

=> матрица A_e имеет вид:

$$A_e = \begin{bmatrix} a_{11} \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} \dots & a_{1n} \\ & \dots & & \\ a_{k1} \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} \dots & a_{kn} \\ 0 \dots & 0 & a_{k+1,k+1} \dots & a_{k+1,n} \\ & \dots & & \\ 0 \dots & 0 & a_{n,k+1} \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

=> имеет квазитреугольную форму:

$$A_e = \begin{bmatrix} A_1 & B \\ O & C \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{2})$$

З1. Верна и обратная теорема: переход от (2) к (1) очевиден => $L = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_k)$ инвариантно отн–но $\mathcal{A}$.

Т2. *Если пр–во* V *является прямой суммой подпро–странств* $L_1, \dots, L_k$, *инвариантных отн–но оператора* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, *то в пр–ве* V *∃ базис, в котором матр–ица оператора* $\mathcal{A}$ *имеет квазидиагональную форму.*

Док–во ан–но док–ву Т1. В качестве искомого базиса берется базис e, составленный из базисов слагаемых подпространств (критерий прямой суммы) => в силу инвариантности $L_1, \dots, L_k$ матрица A_e имеет вид

$$A_e = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ & & \dots \\ 0 & & A_k \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{3})$$

З2. Верна и обратная теорема.

Индуцированный оператор. Рассматривая ЛО только на его инвариантном подпространстве, можно получить новый оператор. Пусть L – подпространство, инвариантное относительно оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$. Отображение $\mathcal{A}\,|\,L : L \to L$, определенное равенством $(\mathcal{A}\,|\,L)x = \mathcal{A}x$, $\forall x \in L$, называется ***индуцированным оператором, порожденным оператором*** $\mathcal{A}$ или ***сужением оператора*** $\mathcal{A}$ ***на L.*** *В* силу линейности оператора $\mathcal{A}$ индуцированный оператор также будет линейным. Он совпадает с ЛО $\mathcal{A}$ на подпространстве L и **не** определен вне его. Итак, $\mathcal{A}\,|\,L \in \mathcal{L}(V, V)$.

З3. Из разложений (1) => матрицы $A_1, \dots, A_k$ в (3) являются матрицами индуцированных операторов $\mathcal{A}_1\,|\,L, \dots, \mathcal{A}_k\,|\,L$ в базисах инвариантных подпространств $L_1, \dots, L_k$.

24. Треугольная форма матрицы линейного оператора. Теорема Шура.

Пусть V – линейное пр–во над полем P и $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$. Линейное подпространство L пр–ва V называется ***инвариантным подпространством относительно оператора*** $\mathcal{A}$, если для для $\forall x \in L : \mathcal{A}x \in L$.

Отображение $\mathcal{A}\,|\,L : L \to L$, определенное равенством $(\mathcal{A}\,|\,L)x = \mathcal{A}x$, $\forall x \in L$, называется ***индуцированным оператором, порожденным оператором*** $\mathcal{A}$ или ***сужением оператора*** $\mathcal{A}$ ***на L.***

Т1. *В* n*–мерном комплексном пр–ве* V *для ∀ ЛО* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ ∃ *система* n *вложенных друг в друга инвариантных подпространств* $L_1, \dots, L_n$ *всех размерностей от* 1 *до* n, *т.е. таких, что* $L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n = V$, *где* $\dim L_k = k$, $k = \overline{1, n}$.

Док–во. Индукция по n. Для $n = 1$ очевидно. Пусть теорема верна для всех линейных пр–тв размерности $n - 1$. Докажем ее для n–мерного пр–ва V.

Л. *ЛО, действующий в* n*–мерном комплексном пр–ве, имеет инвариантное подпространство* $\dim = n - 1$.

Док–во леммы. ЛО $\mathcal{A}$, действующий в комплексном пр–ве V, имеет собственное значение λ (Т: ∀ *ЛО, действующий в* n*–мерном комплексном пр–ве, имеет:*1) *n собственных значений, если каждое собственное значение считать столько раз, какова его кратность как корня характеристического многочлена;*2) *хотя бы 1 собственный вектор;*3) *на ∀ своем инвариантном подпространстве хотя бы 1 собственный вектор*) => $\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = 0$ и $\operatorname{rg}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) \le n - 1$ => $\dim\operatorname{im}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) \le n - 1$ и в пр–ве V ∃ подпространство L размерности $n - 1$, которое содержит $\operatorname{im}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})$. L инвариантно отн–но оператора $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}$. Пусть $x \in L$ => $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})x = y \in L$ => $\mathcal{A}x = \lambda x + y \in L$ => L инвариантно отн–но $\mathcal{A}$.

Док–во теоремы. Согласно лемме оператор $\mathcal{A}$, действующий в n–мерном комплексном пр–ве V, имеет инвариантное подпространство L_{n-1} размерности $n - 1$ => индуцированный оператор $\mathcal{A}\,|\,L_{n-1}$ действует в $(n-1)$–мерном комплексном пр–ве L_{n-1} и по индуктивному предположению для него ∃ система вложенных инвариантных $L_1 \subset \dots \subset L_{n-1}$ таких, что $\dim L_k = k$, $k = \overline{1, n-1}$. Т.к. действия операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}\,|\,L_{n-1}$ совпадают, то $L_1, \dots, L_{n-2} \subset L_{n-1}$ инвари–антны отн-но $\mathcal{A}$. Остается добавить, что $L_{n-1} \subset L_n = V$. •

Т2. *Для ∀ ЛО* $\mathcal{A}$, *действующего в комплексном пр–ве, ∃ базис, в котором матрица ЛО имеет треугольную форму.*

Док–во. Согласно Т1 для оператора $\mathcal{A}$ ∃ система инвариантных подпространств $L_1, \dots, L_n$ таких, что $\dim L_k = k$ и $L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n = V$. Базис $e_1, \dots, e_n$ строим так: в качестве e_1 берем ∀ базис L_1, в качестве e_k, где $k > 1$, – вектор, дополняющий базис L_{k-1} до базиса L_k. В силу инвариантности подпространств L_k $k = \overline{1, n}$, матрица A_e имеет верхнюю треугольную форму. •

З1. На главной диагонали матрицы A_e расположены собственные значения оператора $\mathcal{A}$.

Т3. ∀ *квадратная комплексная матрица подобна матрице, имеющей треугольную форму.*

Док–во. Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – заданная матрица. Рас-смотрим ∀ комплексное пр–во V размерности n. Зафиксируем в пр–ве V ∀ базис f. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ – ЛО, матрица которого в базисе f совпадает с матрицей A, так что $A = A_f$ (такой оператор ∃ по теореме (*Пусть* $\dim V = n$, $\dim W = m$. *Тогда ∃ взаимно однозначное соответствие между ЛО из* $\mathcal{L}(V, W)$ *и матрицами из* $P^{m\times n}$)). В силу Т2 ∃ базис e, в котором матрица A_e оператора $\mathcal{A}$ имеет треугольную форму. При переходе от базиса e к базису $f = eQ$ матрица оператора изменяется по закону $A_f = Q^{-1}A_e Q$. Это равносильно их подобию. •

Т4 (теорема Шура). *Для ∀ оператора, действую–щего в унитарном пр–ве, ∃ ОНБ, в котором он имеет треугольную матрицу.*

Повторяется док–во Т2 , но на каждом шаге строится ОНБ инвариантного подпространства.

25. Сдвиг оператора, нильпотентность и обратимость его сужений.

ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ – ***нильпотентный***, если $\exists\, q \in \mathbb{N}$: $\mathcal{A}^q = \mathcal{O}$ Наименьшее q – ***индекс нильпотентности*** (***высота***) оператора $\mathcal{A}$. Для ненулевого $\mathcal{A}$ $q \geq 2$. Ан–но определяется нильпотентная матрица $A \in P^{n \times n}$ и ее индекс.

Т1. *Если $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ – нильпотентный оператор индекса q и $x_0 \in V$ – вектор, для которого $\mathcal{A}^{q-1} x_0 \neq \theta$, то векторы $x_0, \mathcal{A} x_0, \ldots, \mathcal{A}^{q-1} x_0$ линейно независимы.*

Док–во. Применяя послед–но $\mathcal{A}^{q-1}, \mathcal{A}^{q-2}, \ldots, \mathcal{A}$ к равенству $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 \mathcal{A} x_0 + \ldots + \alpha_{q-1} \mathcal{A}^{q-1} x_0 = \theta$, получим: $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{q-1} = 0$ => линейная независимость системы векторов. •

***С*1**. *Индекс нильпотентности не превосходит* dim V.

Т2. *В комплексном пр–ве ЛО нильпотентен ⇔ все его собственные значения = 0.*

Док–во. Необх–сть. Если λ – собственное значение нильпотентного оп–ра $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ индекса q и x – соот–щий собственный вектор, то $\mathcal{A} x = \lambda x$ => $\mathcal{A}^2 x = \lambda^2 x$ =>...=> $\mathcal{A}^q x = \lambda^q x$ => $\lambda^q x = \theta$. Т.к. $x \neq \theta$, то $\lambda = 0$.

Дост–сть. Рассмотрим базис e комплексного пр–ва V, в котором оператор $\mathcal{A}$ имеет верхнюю треугольную матрицу (*Для ∀ ЛО $\mathcal{A}$, действующего в комплексном пр–ве, ∃ базис, в котором матрица ЛО имеет треугольную форму*), главная диагональ которой состоит целиком из 0 (*На глав–ной диагонали матрицы A_e расположены собственные значения оператора $\mathcal{A}$*) =>

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

При последовательном возведении A_e в степени q=2,3 ... ,n треугольник над главной диагональю перемещается каждый раз на 1 диагональ выше => $(A_e)^n = O$ => $\mathcal{A}^n = \mathcal{O}$. •

Если $V = L_1 \oplus \ldots \oplus L_p$ – прямая сумма подпространств $L_1, L_2, \ldots, L_p$, инвариантных относительно ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, то оператор $\mathcal{A}$ называется ***прямой суммой индуциро–ванных операторов*** $\mathcal{A} \mid L_1, \ldots, \mathcal{A} \mid L_p$. Этот термин мотивирован тем, что для $\forall x \in V$ с разложением $x = x_1 + \ldots + x_p$, где $x_k \in L_k$, $k = \overline{1,p}$, имеет место равенство $\mathcal{A} x = \mathcal{A} x_1 + \ldots + \mathcal{A} x_p = (\mathcal{A} \mid L_1) x_1 + \ldots + (\mathcal{A} \mid L_p) x_p$.

Т3. ∀ *ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ является прямой суммой нильпотентного и обратимого операторов, причем это разложение единственно.*

Док–во. Надо показать, что ∃ ! пара подпространств L_1, L_2, инвариантных относительно ЛО $\mathcal{A}$ и таких, что $V = L_1 \oplus L_2$, $\mathcal{A} \mid L_1$ нильпотентен, $\mathcal{A} \mid L_2$ обратим.

Для невырожденного $\mathcal{A}$: $L_1 = \{\theta\}$, $L_2 = V$. Для нильпотентного $\mathcal{A}$: $L_1 = V$, $L_2 = \{\theta\}$.

Пусть оператор $\mathcal{A}$ вырожден и не нильпотентен.

Существование. Пусть для $k \in \mathbb{N}$: $N_k = \ker \mathcal{A}^k$, $T_k = \operatorname{im} \mathcal{A}^k$

1. Покажем, что *подпространства N_k строго вложены друг в друга до некоторого момента q, начиная с кото–рого все N_k совпадают*, т.е. $N_1 \subset N_2 \subset \ldots \subset N_q = N_{q+1} = \ldots$

а)если $\mathcal{A}^k x = \theta$, то $\mathcal{A}^{k+1} x = \mathcal{A}(\mathcal{A}^k) x = \mathcal{A} \theta = \theta$ => $N_k \subseteq N_{k+1}$

б) Пусть $N_k = N_{k+1}$, тогда $N_{k+1} = N_{k+2}$, т. к. $N_{k+1} \subseteq N_{k+2}$, $N_{k+2} \subseteq N_{k+1}$. 2–е вложение следует из того, что если $x \in N_{k+2}$, то $\mathcal{A}^{k+2} x = \theta$, т.е. $\mathcal{A}^{k+1}(\mathcal{A} x) = \theta$. Значит, $\mathcal{A} x \in N_{k+1} = N_k$ => $\mathcal{A}^k(\mathcal{A} x) = \theta$, т.е. $\mathcal{A}^{k+1} x = \theta$

Из "а" и "б" => подпространство N_k либо строго вложено в N_{k+1}, либо совпадает со всеми последующими ядрами. В конечномерном пр–ве размерности подпространств N_k не могут бесконечно возрастать => наступит момент q, начиная с которого все ядра N_k будут совпадать с N_q.

2. Зафиксируем это q и покажем, что $V = N_q \oplus T_q$. По теореме о ранге и дефекте (rg $\mathcal{A}$ + def $\mathcal{A}$ = dim V): dim V = dim N_q + dim T_q, при этом $N_q \cap T_q = \{\theta\}$, т. к. если $y \in N_q$, $y \in T_q$, то $\mathcal{A}^q y = \theta$, $y = \mathcal{A}^q x$, т.е. $\mathcal{A}^{2q} x = \theta$. Значит, $x \in N_{2q} = N_q$ и $\mathcal{A}^q x = \theta$ => $y = \theta$.

3. Подпространства N_q, T_q *инвариантны отн–но* $\mathcal{A}$, ибо:

а) если $x \in N_q$, то $x \in N_{q+1} = N_q$ => $\mathcal{A}^{q+1} x = \theta$, т.е. $\mathcal{A}^q(\mathcal{A} x) = \theta$ => $\mathcal{A} x \in N_q$

б) если $y \in T_q$, то $y = \mathcal{A}^q x$ и $\mathcal{A} y = \mathcal{A}^{q+1} x = \mathcal{A}^q(\mathcal{A} x) = \mathcal{A}^q x_1$, где $x_1 = \mathcal{A} x$ => $\mathcal{A} y \in T_q$.

4. $\mathcal{A} \mid N_q$ – *нильпотентный оператор индекса q*, так как:

а) $\mathcal{A}^q x = \theta$ для $\forall x \in N_q$

б) $\exists\, x_0 \in N_q$: $\mathcal{A}^{q-1} x_0 \neq \theta$, ибо $N_{q-1} \neq N_q$

5. Оператор $\mathcal{A} \mid T_q$ *обратим*, т. к. ker $\mathcal{A} \mid T_q = \{\theta\}$.

Действительно, если $y \in \ker \mathcal{A} \mid T_q$, то $y \in T_q$, $\mathcal{A} y = \theta$, т.е. $y = \mathcal{A}^q x$ и $\mathcal{A}^{q+1} x = \theta$ => $x \in N_{q+1} = N_q$, т.е. $\mathcal{A}^q x = \theta$ и $y = \theta$.

Из пп. 2–5 => ∃ искомое разложение: $L_1 = N_q$, $L_2 = T_q$.

Единственность. Пусть ∃ другое разложение $V = N \oplus T$ со всеми свойствами 1–го.

1. Нильпотентность $\mathcal{A} \mid N$ => $\mathcal{A}^k x = \theta$, $\forall x \in N$, при некотором $k \in \mathbb{N}$ => $N \subseteq N_k \subseteq N_q$ и dim $N \leq$ dim N_q **(1)**

2. Обратимость $\mathcal{A} \mid T$ => im $\mathcal{A} \mid T = T$ => для $\forall y \in T$: $y = \mathcal{A} y_1$, где $y_1 \in T$. => для y_1 и всех последующих: $y = \mathcal{A} y_1 = \mathcal{A}^2 y_2 = \ldots = \mathcal{A}^q y_q$ => $T \subseteq T_q$ и dim $T \leq$ dim T_q **(2)**

Т.к. dim N + dim T = dim V = dim N_q + dim T_q, то из (1), (2) => $N = N_q$, $T = T_q$ •

***С*2.** *Оператор $\mathcal{A}$ на N_q имеет только 0–е собственные значения, а на T_q не имеет 0–ых собственных значений.* => из Т3 с учетом Т2 и того, что обратимый оператор не вырожден.

***С*3.** *Для оператора $\mathcal{A}$, действующего в комплексном пр–ве V, с характеристическим многочленом*

$f(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I}) = (-\lambda)^{m1} (\lambda_2 - \lambda)^{m2} \ldots (\lambda_p - \lambda)^{mp}$:

а) характеристические многочлены $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ операторов $\mathcal{A} \mid N_q$ и $\mathcal{A} \mid T_q$ имеют вид

$f_1(\lambda) = (-\lambda)^{m1}$, $f_2(\lambda) = (\lambda_2 - \lambda)^{m2} \ldots (\lambda_p - \lambda)^{mp}$ **(3)**

б) при этом dim $N_q = m1$, dim $T_q = m2 + \ldots + mp$ **(4)**

Соотношение (3) вытекает из (*Если $V = L_1 \oplus \ldots \oplus L_k$ – прямая сумма подпространств $L_1, \ldots, L_k$, инвариантных относительно оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, то характеристи–ческий многочлен $f(\lambda)$ оператора $\mathcal{A}$ равен произведению характеристических многочленов $f_1(\lambda), \ldots, f_k(\lambda)$ индуцированных операторов $\mathcal{A} \mid L_1, \ldots, \mathcal{A} \mid L_k$:* $f(\lambda) = f_1(\lambda) \ldots f_k(\lambda)$), если учесть, что $f_2(0) \neq 0$.

Соотношение (4) следует из (3), т.к. размерность пр–ва совпадает со степенью характеристического многочлена.

26. Корневые подпространства. Расщепление линейного пр–ва в прямую сумму

Т1 (о расщеплении ЛО). *Для ∀ ЛО $\mathcal{A}$, действующего в комплексном пр–ве V, с характеристическим мн–ном* $f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m1} (\lambda_2 - \lambda)^{m2} \ldots (\lambda_p - \lambda)^{mp}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ *при* $i \neq j$ **(1)**

∃ *инвариантные подпространства* $K_{\lambda 1}, \ldots, K_{\lambda p}$:

$$V = K_{\lambda 1} \oplus \ldots \oplus K_{\lambda p} \quad \textbf{(2)}$$

$$\dim K_{\lambda j} = m_j,\ j = \overline{1,p} \quad \textbf{(3)}$$

$$f_j(\lambda) = \det(\mathcal{A} \mid K_{\lambda j} - \lambda \mathcal{I}) = (\lambda_j - \lambda)^{mj},\ j = \overline{1,p} \quad \textbf{(4)}$$

Док–во. а) если $\lambda_{\mathcal{A}}$ и $\lambda_{\mathcal{B}}$ – собственные значения операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda_0 \mathcal{I}$ => $\lambda_{\mathcal{B}} = \lambda_{\mathcal{A}} - \lambda_0$ **(5)**

б) если L инвариантно относительно $\mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda_0 \mathcal{I}$, то L инвариантно относительно $\mathcal{A}$, т.к. если $x \in L$, то $\mathcal{B} x = y \in L$, т.е. $(\mathcal{A} - \lambda_0 \mathcal{I}) x = y \in L$ => $\mathcal{A} x = \lambda_0 x + y \in L$.

1–й шаг. Применив к $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{I}$ Т*(*∀ ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ является прямой суммой нильпотентного и обратимого операторов, причем это разложение единственно*), получим подпространства N_{q1} и T_{q1}, которые с учетом (5) обладают следующими свойствами:

$V = N_{q1} \oplus T_{q1}$

N_{q1} и T_{q1} инвариантны относительно $\mathcal{B}_1$

dim $N_{q1} = m_1$ и dim $T_{q1} = m_2 + \ldots + m_p$

$\det(\mathcal{B}_1 \mid N_{q1} - \lambda \mathcal{I}) = (-\lambda)^{m1}$

$\det(\mathcal{B}_1 \mid T_{q1} - \lambda \mathcal{I}) = (\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda)^{m2} \ldots (\lambda_p - \lambda_1 - \lambda)^{mp}$

Положив $K_{\lambda 1} = N_{q1}$, $V_1 = T_{q1}$, получим подпространства $K_{\lambda 1}$ и V_1, инвариантные относительно $\mathcal{A}$ (согласно п. "б"):

$V = K_{\lambda 1} \oplus V_1$

dim $K_{\lambda 1} = m_1$ и dim $V_1 = m_2 + \ldots + m_p$ **(6)**

$\det(\mathcal{A} \mid K_{\lambda 1} - \lambda \mathcal{I}) = (\lambda_1 - \lambda)^{m1}$

$\det(\mathcal{A} \mid N_1 - \lambda \mathcal{I}) = (\lambda_2 - \lambda)^{m2} \ldots (\lambda_p - \lambda)^{mp}$

2–й шаг: применить 1–ый шаг к оператору $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \mid V_1$, получим подпространства $K_{\lambda 2}$ и V_2, обладающие свойствами (6) с очевидными изменениями. Через $p - 1$ шагов получим все подпространства $K_{\lambda 1}, \ldots, K_{\lambda p} = V_{p-1}$, удовлетворяющие требованиям теоремы. •

Из Т1 и Т (*Если пр–во V является прямой суммой подпространств $L_1, \ldots, L_k$, инвариантных относительно $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, то в пр–ве V ∃ базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет квазидиагональную форму.*) =>

Сл. *Для ∀ ЛО, действующего в комплексном пр–ве, ∃ базис, в котором его матрица имеет квазидиагональную форму, у которой число диагональных клеток совпадает с числом различных собственных значений, а их размеры – с алгебраическими кратностями собственных значений*, или, в матричной формулировке, ∀ *квадратная комплексная матрица подобна квазидиагональной матрице, обладающей указанным выше свойством.*

З. Разложение (2) со свойствами из Т1, для каждого оператора единственно в силу Т*.

Пусть λ_j – собственное значение оператора $\mathcal{A}$. Вектор $x \in V$ называется ***корневым вектором*** оператора $\mathcal{A}$, ***отвечающим собственному значению*** λ_j, если $(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^k x = \theta$ при некотором $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$. ***Высота*** корневого вектора – наименьшее k, обладающее указанным свойством. Только высота 0–го корневого вектора = 0.

Из определения => свойства корневых векторов:

1°. *Корневые векторы высоты* 1 *являются собственными векторами*, т.к. $(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I}) x = \theta$, $x \neq \theta$.

2°. *Если x – корневой вектор высоты $k > 0$, то вектор $(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I}) x$ – корневой вектор высоты* $k - 1$.

3°. *Если x – корневой вектор высоты $k > 0$, то векторы $x, (\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I}) x, \ldots, (\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^{k-1} x$ линейно независимы.*

Док–во. К $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 (\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I}) x_0 + \ldots, \alpha_{k-1} (\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^{k-1} x_0 = \theta$ применим последовательно $(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^{k-1}, (\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^{k-2}, \ldots, (\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})$ => $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{k-1} = 0$=> линейная незав–сть.

4°. *Корневые векторы различных высот линейно незав–мы.*

Корневые векторы высоты $k > 1$ – ***присоединенные векторы*** **(k – 1)–го *порядка***. Если x – присоединенный вектор $(k - 1)$–го порядка, то $(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^k x = \theta$, $(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^{k-1} x \neq \theta$,т.е, $(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^{k-1} x$ – собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению λ_j. Т.о., корневой вектор – это θ | собственный | присоединенный.

Множество всех корневых векторов оператора $\mathcal{A}$, отвеча–ющих собственному значению λ_j, называется ***корневым подпространством*** оператора $\mathcal{A}$, ***отвечающим собстве–нному*** λ_j: $K_{\lambda j} = \{x \in V \mid \exists\, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0: (\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^k x = \theta\}$.

Структура корневого подпространства:

Пусть $N_k = \ker(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^k$. Тогда подпространства N_k строго вложены друг в друга до некоторого q, начиная с которого все N_k совпадают: $N_1 \subset N_2 \subset \ldots \subset N_q = N_{q+1} = \ldots$ **(7)**

а)$(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^k x = \theta$ => $(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^{k+1} x = (\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})((\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^k) x = (\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})\, \theta = \theta$ => $N_k \subseteq N_{k+1}$

б) Пусть $N_k = N_{k+1}$ => $N_{k+1} = N_{k+2}$, т. к. $N_{k+1} \subseteq N_{k+2}$, $N_{k+2} \subseteq N_{k+1}$. 2–е вложение следует из : если $x \in N_{k+2}$, то $(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^{k+2} x = \theta$ => $(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^{k+1}((\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I}) x) = \theta$ => $(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I}) x \in N_{k+1} = N_k$ => $(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^k((\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I}) x) = \theta$ => $(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^{k+1} x = \theta$

Из "а" и "б" => N_k либо строго вложено в N_{k+1}, либо совпадает со всеми последующими ядрами => наступит момент q, начиная с которого все N_k будут совпадать с N_q

1. N_1 состоит из корневых векторов высоты, не пре–восходящей 1, т.е. из θ и всех собственных векторов, отвечающих собственному значению λ_j, т.е. совпадает с собственным подпространством $W_{\lambda j}$ =>

$N_1 = W_{\lambda j}$ **(8)** => dim $N_1 = s_j$ **(9)**

s_j – геометрическая кратность собственного значения λ_j.

2. Подпространство N_2 в (7) состоит из корневых векторов высоты ≤ 2, а подпространство N_q состоит из корневых векторов всех высот, т.е. совпадает с корневым подпространством $K_{\lambda j}$ => q – максимальная высота корневого вектора, отвечающего λ_j :

$K_{\lambda j} = \ker(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^q$ и $W_{\lambda 1} = N_1 \subset N_2 \subset \ldots \subset N_q = K_{\lambda j}$ **(10)**

=> подпространства $K_{\lambda 1}, \ldots, K_{\lambda p}$, построенные при док–ве Т1, совпадают с корневыми подпространствами, отвечаю–щими собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ соответст–венно => корневые подпространства обладают свойствами (2)–(4).

3. Из (10) => максимальная высота q корневых векторов, отвечающих собственному значению λ_j, совпадает с индексом нильпотентности оператора $\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I}$ и согласно св–ву 3° не превосходит размерности $K_{\lambda j}$, т.е. алгебраической кратности собственного значения λ_j.

4. Из (10) => собственное подпространство $W_{\lambda j}$ является подпространством корневого подпространства $K_{\lambda j}$, так что $s_j \leq m_j$. При этом $W_{\lambda j} = K_{\lambda j}$ ⇔ $s_j = m_j$.

27. Жорданов базис и жорданова матрица ЛО. Канонический базис корневого подпространства.

Пусть $K_{\lambda j}$ – корневое подпространство оператора $\mathcal{A}$, отвечающее собственному значению λ_j. Положим $\mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I}$, $N_k = \ker \mathcal{B}^k$, $n_k = \dim N_k$, $r_k = \operatorname{rg} \mathcal{B}^k$.

Построим корневое подпространство $K_{\lambda j}$. Сначала найти момент q, начиная с которого все ядра N_k будут совпадать с $N_q = K_{\lambda j}$. В силу dim $N_1 = s_j$ и dim $K_{\lambda j} = m_j$: $n_1 = s_j < n_2 < \ldots < n_q = m_j$, где s_j и m_j – геометрическая и алгебраическая кратности λ_j. Базис $K_{\lambda j}$ строится, последовательно просматривая $N_q, N_{q-1}, \ldots, N_1$.

N_q) Пусть $f_1, \ldots, f_{tq}$ – векторы, дополняющие ∀ базис N_{q-1} до базиса N_q :

1) это корневые векторы высоты q

2) их количество равно $n_q - n_{q-1}$

3) $t_q = n_q - n_{q-1} = (n_q - n_{q-1}) - (n_{q+1} - n_q) = -n_{q+1} + 2n_q - n_{q-1}$, т.к. $n_{q+1} = n_q$

4) никакая нетривиальная линейная комбинация этих векторов $\notin N_{q-1}$ (*линейно независимыми над* N_{q-1}).

N_{q-1}) Построим векторы $\mathcal{B} f_1, \ldots, \mathcal{B} f_{tq}$: корневые векторы высоты $q - 1$ и линейно независимы над N_{q-2}, т.к. иначе для нетривиального набора $\alpha_1, \ldots, \alpha_{tq}$: $\mathcal{B}^{q-2} \sum_{k=1}^{tq} \alpha_k \mathcal{B} f_k = \theta$, т.е. $\mathcal{B}^{q-1} \sum_{k=1}^{tq} \alpha_k f_k = \theta$ и $\sum_{k=1}^{tq} \alpha_k f_k \in N_{q-1}$, что противоречит линейной независимости $f_1, \ldots, f_{tq}$ над N_{q-1}.

Дополним векторами $g_1, \ldots, g_{tq-1}$ так, чтобы $\mathcal{B} f_1, \ldots, \mathcal{B} f_{tq}$, $g_1, \ldots, g_{tq-1}$ дополняли ∀ базис N_{q-2} до базиса N_{q-1} :

1) это корневые векторы высоты $q - 1$;

2) их количество равно $n_{q-1} - n_{q-2}$;

3) $t_{q-1} = (n_{q-1} - n_{q-2}) - (n_q - n_{q-1}) = -n_q + 2n_{q-1} - n_{q-2}$

4) они линейно независимы над N_{q-2}

N_{q-2}) Ан–но строятся $\mathcal{B}^2 f_1, \ldots, \mathcal{B}^2 f_{tq}$, , $\mathcal{B} g_1, \ldots, \mathcal{B} g_{tq-1}$, $h_1, \ldots, h_{tq-2}$, дополняющие ∀ базис N_{q-3} до базиса N_{q-2}.

…

N_1) Строятся $\mathcal{B}^{q-1} f_1, \ldots, \mathcal{B}^{q-1} f_{tq}$, , $\mathcal{B}^{q-2} g_1, \ldots, \mathcal{B}^{q-2} g_{tq-1}$,…, $\mathcal{B} v_1, \ldots, \mathcal{B} v_{t2}$, дополняются векторами $u_1, \ldots, u_{t1}$ до базиса N_1. Они :

1) являются собственными векторами;

2) их количество равно $n_1 = n_1 - n_0$ (n_0 = def $\mathcal{B}^0$ = 0);

3) $t_1 = (n_1 - n_0) - (n_2 - n_1) = -n_2 + 2n_1 - n_0$

4) они линейно независимы.

Полученная за q шагов система – ***жорданова лестница.***

Т1. *Построенная система векторов образует базис корневого подпространства* $K_{\lambda j}$.

Док–во. Кол–во векторов в этой системе = dim $K_{\lambda j}$, т.к. $n_1 + (n_2 - n_1) + (n_3 - n_2) + \ldots + (n_q - n_{q-1}) = n_q = \dim K_{\lambda j}$.

Они линейно независимы, т.к. если приравнять их линейную комбинацию θ и последовательно применить $\mathcal{B}^{q-1}, \mathcal{B}^{q-2}, \ldots, \mathcal{B}$, то все коэффициенты = 0. •

Полученный базис называется ***каноническим*** **(или *жордановым*) *базисом корневого подпространства*** $K_{\lambda j}$.

Матрица оператора $\mathcal{A} \mid K_{\lambda j}$ в каноническом базисе.

1. Пусть $e_1, \ldots, e_q$ – векторы 1–го столбца лестницы:

$$\begin{cases} e_1 = \mathcal{B}^{q-1} f_1 \\ e_2 = \mathcal{B}^{q-2} f_1 \\ \ldots \\ e_q = f_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{B} e_1 = \theta \\ \mathcal{B} e_2 = e_1 \\ \ldots \\ \mathcal{B} e_q = e_{q-1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I}) e_1 = \theta \\ (\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I}) e_2 = e_1 \\ \ldots \\ (\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I}) e_q = e_{q-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{A} e_1 = \lambda_j e_1 \\ \mathcal{A} e_2 = \lambda_j e_2 + e_1 \\ \ldots \\ \mathcal{A} e_q = \lambda_j e_q + e_{q-1} \end{cases} \quad (\mathbf{1})$$

Этой группе векторов соответствуют 1-ые q столбцов матрицы $\mathcal{A} \mid K_{\lambda j}$ в каноническом базисе, которые согласно (1) имеют вид $\begin{bmatrix} J_q(\lambda_j) \\ O \end{bmatrix}$ **(2)**

где $J_q(\lambda_j)$ – клетка Жордана q–го порядка с λ_j на главной диагонали. Так же устроены столбцы матрицы $\mathcal{A} \mid K_{\lambda j}$, определяемые векторами 2–го столбца: диагональная клетка имеет тот же вид $J_q(\lambda_j)$, а все остальные элементы = 0 => 1–я группа из t_q столбцов порождает клетки Жордана q–го порядка с λ_j на главной диагонали. Число этих клеток = t_q.

2. Следующая группа из t_{q-1} столбцов определяет клетки $J_{q-1}(\lambda_j)$ на главной диагонали матрицы $\mathcal{A} \mid K_{\lambda j}$. Число клеток $(q - 1)$–го порядка равно t_{q-1}.

3. Рассмотрев все столбцы жордановой лестницы, получим матрицу A, оператора $\mathcal{A} \mid K_{\lambda j}$ в каноническом базисе. A_j – квазидиагональная матрица с клетками Жордана $J_k(\lambda_j)$ на главной диагонали. Всего этих кле–ток столько, сколько столбцов в жордановой лестнице, т.е. n_1 или, согласно (dim $N_1 = s_j$), s_j (геометрическая кратность λ_j) =>

$$A_j = \begin{bmatrix} J_{q1}(\lambda_j) & & O \\ & J_{q2}(\lambda_j) & \\ & \ldots & \\ O & & J_{q_{sj}}(\lambda_j) \end{bmatrix} \quad (\mathbf{3})$$

где $q_1 + \ldots + q_{sj} = \dim K_{\lambda j} = m_j$, а число клеток k –го порядка : $t_k = -n_{k-1} + 2n_k - n_{k+1}$, $k = \overline{1,q}$.

4. Матрица A_j определена однозначно с точностью до порядка клеток, т.к. количество всех клеток равно геометрической кратности s_j собственного значения λ_j, а количество клеток k – го порядка равно числу $t_k = -n_{k-1} + 2n_k - n_{k+1}$, $k = \overline{1,q}$, или, согласно (rg $\mathcal{A}$ + def $\mathcal{A}$ = dim V), $t_k = r_{k-1} - 2r_k + r_{k+1}$, $k = \overline{1,q}$

=> структура клеток Жордана в матрице A_j определяется только оператором $\mathcal{A}$. Порядок клеток определен порядком нумерации столбцов жордановой лестницы.

Жорданова форма матрицы ЛО в комплекс. пр–ве.

m_j и s_j – алгебраическая и геометрическая кратности λ_j, $r_k = \operatorname{rg}(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^k$.

Т2. *Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ – ЛО, действующий в комплек–сном пр–ве V, и его характеристический многочлен имеет вид* $f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m1} (\lambda_2 - \lambda)^{m2} \ldots (\lambda_p - \lambda)^{mp}$, *где* $\lambda_i \neq \lambda_j$ *при* $i \neq j$. *Тогда в пр–ве V ∃ базис e, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет квазидиагональную форму*

$$A_e = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ & \ldots & \\ 0 & & A_k \end{bmatrix} \quad (\mathbf{4})$$

в которой матрицы A_j, $j = \overline{1,p}$, имеют вид (3).

Док–во. По Т*, $V = K_{\lambda 1} \oplus \ldots \oplus K_{\lambda p}$. В качестве искомого базиса e возьмем совокупность канонических базисов корневых подпространств $K_{\lambda 1}, \ldots, K_{\lambda p}$. По Т** матрица A_e имеет вид (4), где A_j – матрица оператора $\mathcal{A} \mid K_{\lambda j}$ в каноническом базисе $K_{\lambda j}$ => матрица A_j имеет вид (3). •

Сл. *Для собственных значений оп–ра $\mathcal{A}$ верны соотношения* $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = \operatorname{tr} \mathcal{A}$, $\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \det \mathcal{A}$

Полученная форма матрицы линейного оператора – ***жорданова форма***, а построенный базис – ***канонический*** (***жорданов***) ***базис***.

З. В матричной формулировке Т2: ∀ *квадратная комплексная матрица подобна матрице, имеющей жорданову форму.*

Док–во. Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ – заданная матрица. Рассмотрим ∀ комплексное пр–во V размерности n. Зафиксируем в пр–ве V ∀ базис f. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ – ЛО, матрица которого в базисе f совпадает с матрицей A: $A = A_f$ (по Т*** такой оператор ∃). В силу Т2 ∃ базис e, в котором матрица A_e оператора $\mathcal{A}$ имеет квазидиагональ–ную форму. При переходе от базисе e к базису $f = eQ$ матрица оператора изменяется по закону $A_f = Q^{-1} A_e Q$. Это равносильно их подобию. •

Матрица A_e, имеющая жорданову форму и подобная матрице A, называется ***жордановой формой матрицы*** A.

*: (о расщеплении ЛО) *Для ∀ ЛО $\mathcal{A}$, действующего в комплексном пр–ве V, с характеристическим многочленом*

$f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m1} (\lambda_2 - \lambda)^{m2} \ldots (\lambda_p - \lambda)^{mp}$ *где* $\lambda_i \neq \lambda_j$ *при* $i \neq j$

∃ *инвариантные подпространства* $K_{\lambda 1}, \ldots, K_{\lambda p}$:

$$V = K_{\lambda 1} \oplus \ldots \oplus K_{\lambda p}$$

$$\dim K_{\lambda j} = m_j,\ j = \overline{1,p}$$

$$f_j(\lambda) = \det(\mathcal{A} \mid K_{\lambda j} - \lambda \mathcal{I}) = (\lambda_j - \lambda)^{mj},\ j = \overline{1,p}$$

****:** *Если пр–во V является прямой суммой подпространств $L_1, \ldots, L_k$, инвариантных относительно оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, то в пр–ве V ∃ базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет квазидиагональную форму.*

***: *Пусть* dim $V = n$, dim W = m. *Тогда ∃ взаимно однозначное соответствие между ЛО из $\mathcal{L}(V, W)$ и матрицами из* $P^{m \times n}$

28. Критерий подобия матриц.

2 матрицы A, B называются ***эквивалентными*** ($A \sim B$), если $\exists$ невырожденные матрицы P и Q : $A = PBQ$.
Квадратные матрицы A, B называются ***подобными***, если $\exists$ невырожденная матрица Q : $A = Q^{-1}BQ$.
Матрица A_e, имеющая жорданову форму и подобная матрице A, называется ***жордановой формой матрицы A.***

Т. *Две матрицы $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ подобны $\Leftrightarrow$ их жордановы формы совпадают.*

Док–во. Из Т* => 2 квадратные матрицы $A, B \in P^{n\times n}$ одинакового порядка над общим полем подобны $\Leftrightarrow$ они являются матрицами одного и того же ЛО, действующего в n–мерном линейном пространстве над полем P. А т.к. $\forall$ квадратная комплексная матрица подобна матрице, имеющей жорданову форму, то отсюда следует утверждение теоремы. •

***:** *2 матрицы A и B над полем P одинакового размера $m\times n$ эквивалентны $\Leftrightarrow$ они являются матрицами одного и того же ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, где V и W – линейные пр–ва над полем P размерностей n и m соотв–но.*

29. Теорема Гамильтона–Кэли. Минимальный многочлен.

Т(Гамильтона—Кэли). *ЛО, действующий в комплексном* (*или в вещественном*) *пр–ве, является корнем своего характеристического многочлена.*

Док–во. 1. Для комплексного пр–ва V. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ и его характеристический многочлен:

$$f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m1} (\lambda_2 - \lambda)^{m2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{mp}, \ \lambda_i \neq \lambda_j \ \text{при } i \neq j \qquad \mathbf{(1)}$$

По Т (*), $V = K_{\lambda 1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda p}$ => для $\forall x \in V$ $\exists$ разложение $x = x_1 + \dots + x_p$, где $x_j \in K_{\lambda j}$, $j = \overline{1, p}$. =>

$f(\mathcal{A})x = f(\mathcal{A})x_1 + \dots + f(\mathcal{A})x_j + \dots + f(\mathcal{A})x_p$.

$\forall$ слагаемое в этом разложении $= \theta$, т. к.

$f(\mathcal{A})x_j = (\lambda_1\mathcal{I} - \mathcal{A})^{m1} \dots (\lambda_j\mathcal{I} - \mathcal{A})^{mj} \dots (\lambda_p\mathcal{I} - \mathcal{A})^{mp} x_j = \theta$,

ибо операторы в этом произведении перестановочны, а $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{mj} x_j = \theta$ в силу ($W_{\lambda 1} = N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_q = K_{\lambda j}$)

=> $f(\mathcal{A})x = \theta$, $\forall x \in V$, т.е. $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$.

2. Пусть V – вещественное линейное пр–во. Пусть e – базис пр–ва V и A_e – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Достаточно показать, что $f(A_e) = O$.
Рассмотрим $\forall$ комплексное пр–во V_1 той же размерности, что и V. Пусть f – $\forall$ базис V_1 => A_e является матрицей оператора $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V_1, V_1)$ в базисе f, т.е. $A_e = B_f$ => характеристические многочлены $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ совпадают и, по п. 1 док–ва, $f(A_e) = O$. •

Многочлен $f(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \dots + a_m$ называется ***аннулирующим*** для матрицы A, если

$$f(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \dots + a_m I = 0.$$

Пусть $a_0 = 1$. Если $f_n(\lambda)$ – характеристический многочлен для матрицы A, то по теореме Гамильтона – Кэли $f_n(A) = 0$ => характеристический многочлен – один из аннулирующих многочленов A. Многочлен $f_n(\lambda)$ имеет степень n, но может оказаться, что $\exists$ многочлен $\psi(\lambda)$ степени меньшей n, аннулирующий для матрицы A. Такой многочлен наименьшей степени называют ***минимальным многочленом*** матрицы A.
Его свойства:

1) $\forall$ аннулирующий многочлен нацело делится на минимальный многочлен. Пусть $f(\lambda)$ есть такой многочлен. Если разделить его на $\psi(\lambda)$, то его можно представить в виде $f(\lambda) = \psi(\lambda)\,Q(\lambda) + r(\lambda)$, где $r(\lambda)$ имеет степень, меньшую чем $\psi(\lambda)$. Т.к. $f(A) = 0$ и $\psi(A) = 0$ => $r(A) = 0$, что возможно только если $r(\lambda) \equiv 0$ => $f(\lambda)$ нацело делится на $\psi(\lambda)$.
2) Из п. 1) => характеристический многочлен нацело делится на минимальный многочлен => корни минимального многочлена являются собственными числами матрицы A.
3) Минимальный многочлен матрицы – единственный. Если бы существовало 2 минимальных многочлена я $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$, то разность между ними $r(\lambda) = \psi_1(\lambda) - \psi_2(\lambda)$ была бы аннулирующим многочленом для A, степень которого меньше, чем $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$, что противоречит их минимальности.

Т.о, если $f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m1} (\lambda_2 - \lambda)^{m2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{mp}$ где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, и $m1 + \dots + mp = n$, то минимальным многочленом является
$\psi(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n1} (\lambda_2 - \lambda)^{n2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{np}$, $0 < ni \leq mi$.

----

*: (о расщеплении ЛО) *Для $\forall$ ЛО $\mathcal{A}$, действующего в комплексном пр–ве V, с характеристическим многочленом*
$f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m1} (\lambda_2 - \lambda)^{m2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{mp}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ *при* $i \neq j$
$\exists$ *инвариантные подпространства* $K_{\lambda 1}, \dots, K_{\lambda p}$:

$$V = K_{\lambda 1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda p}$$
$$\dim K_{\lambda j} = mj, \ j = \overline{1, p}$$
$$f_j(\lambda) = \det(\mathcal{A} \mid K_{\lambda j} - \lambda\mathcal{I}) = (\lambda_j - \lambda)^{mj}, \ j = \overline{1, p}$$

30. Инвариантные подпространства минимальной размерности.

Пусть V – линейное пр–во над полем P и $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$.
Линейное подпространство L пр–ва V называется ***инвариантным подпространством относительно оператора*** $\mathcal{A}$, если для $\forall x \in L$: $\mathcal{A}x \in L$.
Характеристическим многочленом матрицы $A \in P^{n\times n}$ называется функция $f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, $\lambda \in P$

Т1. *У всякого ЛО в комплексном пр–ве $\exists$ одномерное инвариантное подпространство.*

Док–во. Утверждение следует из существования собственного вектора для $\forall$ оператора, действующего в комплексном пр–ве (Т*): если e – собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, то $\mathcal{L}(e)$ – одномерное подпространство, инвариантное относительно $\mathcal{A}$. •

Т2. У *всякого ЛО в вещественном пр–ве $\exists$ 1–мерное или 2–мерное инвариантное подпространство.*

Док–во. Пусть V – вещественное пр–во, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, $e = (e_1, \dots, e_n)$ – базис V и A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе e. Характеристический многочлен $f(\lambda)$ оператора $\mathcal{A}$ – многочлен с вещественными коэффициентами, т.к. $f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Пусть λ_0 – корень характеристического многочлена.
1. Если $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, то λ_0 – собственное значение оператора $\mathcal{A}$. Тогда линейная оболочка $\mathcal{L}(e)$, натянутая на соответствующий собственный вектор e, образует 1–мерное подпространство, инвариантное отн–но $\mathcal{A}$.
2. Если $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, то $|A - \lambda_0 I| = 0$ и система уравнений $Az = \lambda_0 z$ **(1)** над полем $\mathbb{C}$ имеет нетривиальное решение $z_0 = (x_1 + i\,y_1, \dots, x_n + i\,y_n)^T$.
В обозначениях $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}$ система (1) : $A(x + i\,y) = (\alpha + i\beta)(x + i\,y)$ или

$$\begin{cases} Ax = \alpha x - \beta y \\ Ay = \beta x + \alpha y \end{cases} \quad \mathbf{(2)}$$

Тогда, если $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $v = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, то системе (2) соответствует система векторных уравнений

$$\begin{cases} Au = \alpha u - \beta v \\ Av = \beta u + \alpha v \end{cases} \quad \mathbf{(3)}$$

где u и v – векторы пр–ва V, одновременно $\neq 0$. Из (3) => $\mathcal{L}(u,v)$ – инвариантное подпространство dim = 2.•

----

*: *Произвольный ЛО, действующий в n–мерном комплексном пр–ве, имеет:*
1) *n собственных значений, если каждое собственное значение считать столько раз, какова его кратность как корня характеристического многочлена;*
2) *хотя бы 1 собственный вектор;*
3) *на $\forall$ своем инвариантном подпространстве хотя бы 1 собственный вектор.*

31. Вещественный аналог жордановой формы.

Пусть матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ имеет жорданову клетку $J_q(\lambda)$ порядка q для комплексного собственного значения $\lambda = \alpha + i\beta$ с мнимой частью $\beta \neq 0$ => $\exists$ жорданова цепочка:

$$\begin{cases} Ae_1 = \lambda_j e_1 \\ Ae_2 = \lambda_j e_2 + e_1 \\ \quad \dots \\ Ae_q = \lambda_j e_q + e_{q-1} \end{cases}$$

Представим e_j в виде $e_j = x_j + i\,y_j$, где x_j, $y_j \in \mathbb{R}^n$ =>
$A[x_1, y_1, \dots, x_q, y_q] = [x_1, y_1, \dots, x_q, y_q]\,M_{2q}$, где

$$M_{2q} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & & & & \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & & & & \\ & & \alpha & \beta & 1 & 0 & & \\ & & -\beta & \alpha & 0 & 1 & & \\ & & & & \dots & & & \\ & & & & \alpha & \beta & 1 & 0 \\ & & & & -\beta & \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \in R^{(2q)\times(2q)} \quad (*)$$

Линейная оболочка $\mathcal{L}(x_1, y_1, \dots, x_q, y_q) \subset \mathbb{R}^n$ является инвариантным подпространством размерности $2q$, совпадающим с прямой суммой двух подпространств – корневого пространства матрицы A для собственного значения $\lambda = \alpha + i\beta$ и корневого пространства для сопряженного собственного значения $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ (в силу вещественности коэффициентов характеристического многочлена, $\overline{\lambda}$ и λ оба являются собственными значениями матрицы A одинаковой кратности). Из сказанного вытекает

Т. $\forall$ *матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ с помощью вещественного преобразования подобия приводится к прямой сумме вещественных жордановых блоков и вещественных блоков вида* (*).

32. Сопряженный оператор. Существование и единственность. Матрица сопряженного оп-ра.

V и W – 2 пр–ва, оба унитарных или оба евклидовых.

T1. *Если $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – ЛО из $\mathcal{L}(V, W)$ и $(\mathcal{A}x, y) = (\mathcal{B}x, y)$, $\forall x \in V, y \in W$, то $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.*

Док–во. $(\mathcal{A}x, y)=(\mathcal{B}x, y)$, $\forall x \in V, y \in W$ => $(\mathcal{A}x-\mathcal{B}x, y)=0$, $\forall y \in W$ => $\mathcal{A}x - \mathcal{B}x = \theta$ => $\mathcal{A}x = \mathcal{B}x$ $\forall x \in V$ => $\mathcal{A} = \mathcal{B}$

З. Из $(x, \mathcal{A}y) = (x, \mathcal{B}y)$, $\forall x \in V, y \in W$ => $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$. Отображение $\mathcal{A}^*: W \to V$ называется ***сопряженным оператором*** к *оператору* $\mathcal{A}$, если $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y)$, $\forall x \in V, y \in W$ **(1)**

T2. *Сопряженный оператор линеен.*

Док–во. Пусть $y_1, y_2 \in W$ => из (1)

$$(\mathcal{A}x, (y_1 + y_2)) = (x, \mathcal{A}^*(y_1 + y_2)) \quad \mathbf{(2)}$$

С другой стороны, $(\mathcal{A}x, (y_1 + y_2)) = (\mathcal{A}x, y_1) + (\mathcal{A}x, y_2) =$ $= (x, \mathcal{A}^*y_1) + (x, \mathcal{A}^*y_2) = (x, \mathcal{A}^*y_1 + \mathcal{A}^*y_2)$ => с учетом (2): $(x, \mathcal{A}^*(y_1 + y_2) - (\mathcal{A}^*y_1 + \mathcal{A}^*y_2)) = 0$, $\forall x \in V$ =>

$\mathcal{A}^*(y_1 + y_2) = (\mathcal{A}^*y_1 + \mathcal{A}^*y_2)$, $\forall y_1, y_2 \in W$ **(3)**

Пусть $y \in W$, $\alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ => из (1)

$$(\mathcal{A}x, \alpha y) = (x, \mathcal{A}^*(\alpha y)) \quad \mathbf{(2^*)}$$

С другой стороны, $(\mathcal{A}x, \alpha y) = \alpha(\mathcal{A}x, y) = \alpha(x, \mathcal{A}^*y) =$ $(x, \alpha\mathcal{A}^*y)$ => учетом (2*) : $(x, \mathcal{A}^*(\alpha y) - \alpha\mathcal{A}^*y)=0$, $\forall x \in V$ => $\mathcal{A}^*(\alpha y) = \alpha\mathcal{A}^*y$, $\forall y \in W$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ **(4)**

Из (3), (4) => линейность $\mathcal{A}^*$ •

T3. *Для $\forall$ ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ $\exists$! сопряженный оператор.*

Док–во. Существование. Пусть $e_1,..., e_n$ – ОНБ V => для $\forall x \in V$ имеет место разложение

$$x = \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k => Ax = \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)\mathcal{A}e_k => (\mathcal{A}x, y)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)(\mathcal{A}e_k, y), \quad \forall y \in W \quad (\mathbf{5})$$

Покажем, что сопряженным к $\mathcal{A}$ является оператор $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$, определенный равенством

$$\mathcal{B}y = \sum_{k=1}^{n}(y, \mathcal{A}e_k)e_k, \quad \forall y \in W$$

$$\text{Из } (x, \mathcal{B}y) = (x, \sum_{k=1}^{n}(y, \mathcal{A}e_k)e_k) = \sum_{k=1}^{n}(\mathcal{A}e_k, y)(x, e_k)$$
$$+(5) => \ (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{B}y) => \ B = \mathcal{A}^*$$

Из T1 => единственность, т.к. для $\forall$ $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, сопряжен–ных к $\mathcal{A}$:$(x, \mathcal{B}y) = (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{C}y)$, $\forall x \in V, y \in W$

T4. *Операция сопряжения ЛО обладает следующими свойствами:*

1) $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$, 4) $(\mathcal{A}^{-1})^* = (\mathcal{A}^*)^{-1}$,

2) $(\alpha\mathcal{A})^* = \overline{\alpha}\mathcal{A}^*$, 5) $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$,

3) $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$,

выполненными для $\forall$ операторов, для которых определены указанные операции.

*Док–во***.** Из (1) и T1 и T2: $\forall$ x, y

1)$(x, (\mathcal{A} + \mathcal{B})^*y) = ((\mathcal{A} + \mathcal{B})x, y) = (\mathcal{A}x + \mathcal{B}x, y) =$ $=(\mathcal{A}x, y) + (\mathcal{B}x, y)=(x, \mathcal{A}^*y) + (x, \mathcal{B}^*y)=(x, (\mathcal{A}^*+\mathcal{B}^*) y)$

2)$(x, (\alpha\mathcal{A})^*y) = ((\alpha\mathcal{A}) x, y) = (\mathcal{A}x, \overline{\alpha} y) = (x, \mathcal{A}^*(\overline{\alpha}y)) =$ $=(x, (\overline{\alpha}\mathcal{A}^*) y)$

3) $(x, (\mathcal{A}\mathcal{B})^*y) = (\mathcal{A}\mathcal{B}x, y) = (\mathcal{B}x, \mathcal{A}^*y) = (x, \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*y)$

4) (очевидно, для невырожденных $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$) вытекает из св–ва 3, т.к. если $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{I}$, то $(\mathcal{A}^{-1})^*\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*(\mathcal{A}^{-1})^* = \mathcal{I}$ => $(\mathcal{A}^{-1})^*$ обратный к $\mathcal{A}^*$.

5) $(x, (\mathcal{A}^*)^*y) = (\mathcal{A}^*x, y) =(x, \mathcal{A}y)$ •

Рассматриваем ЛО, действующие в одном пр–ве V, унитарном или евклидовом.

Две системы векторов $x_1, ..., x_k$ и $y_1, …, y_k$ в унитарном (евклидовом) пр–ве – ***биортогональны***, если

$$(x_i , y_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$\forall$ из 2–х биортогональных систем векторов линейно независима (для док–ва линейную комбинацию век–торов одной системы = θ и последовательно умножать равенство скалярно на векторы другой системы)

Биортогональные системы $e_1, ..., e_n$ и $f_1,..., f_n$, образую–щие базисы пр–ва V, называют ***биортогональной парой базисов*** $(e_i, f_j) =$ $\begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ **(6)**

ОНБ биортогонален самому себе.

T5. *Для $\forall$ базиса $e_1, ...,e_n$ унитарного (евклидова) пр–ва $\exists$! биортогональный базис $f_1,..., f_n$.*

Док–во. Согласно (6) вектор f_j $j = \overline{1,n}$ ортогонален всем $e_1, ...,e_n$, кроме e_j => $f_j \in L_j = \mathcal{L}^{\perp}(e_1, ..., e_{j-1}, e_{j+1}, …, e_n)$. $\dim L_j = 1$. Если g – базис L_j, то $f_j = \alpha g$. Из (6) => $(f_j, e_i) = 1$ => $\alpha = 1/(g, e_i)$ => существование и единствен–ность векторов f_j $j = \overline{1,n}$ биортогонального базиса. •

T6. *В паре биортогональных базисов e и f унитарного (евклидова) пр–ва V матрицы операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ связаны соотношением* $(\mathcal{A}^*)_f = (A_e)^H$ **(7)**

Док–во. Пусть $A_e = (a_{ij})$, $(\mathcal{A}^*)_f = (b_{ij})$ =>

$$\mathcal{A}e_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}e_k, \quad \mathcal{A}^* f_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}f_k$$

Умножим 1–е равенство скалярно на f_i :

$$(\mathcal{A}e_j, f_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(e_k , f_i)$$

$$(\mathcal{A}e_j, f_i) = (e_j, \mathcal{A}^* f_i) = \left(e_j, \sum_{k=1}^{n} b_{ki}f_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \overline{b_{ki}}(e_j, f_k) = \overline{b_{ji}}$$

=> $a_{ij} = \overline{b_{ji}}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$ => (7) •

***Сл*1**. *В ОНБ e* $(\mathcal{A}^*)_e = (A_e)^H$

***Сл*2.** *Для $\forall$ ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$:*

$$\det \mathcal{A}^* = \overline{\det \mathcal{A}}, \ \operatorname{rg} \mathcal{A}^* = \operatorname{rg} \mathcal{A}.$$

33. Нормальный оператор и нормальная матрица.

V – унитарное или евклидово пр–во. ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ ***нормальный***, если $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$. Комплексная или веще–ственная квадратная матрица ***нормальная***, если $AA^H = A^HA$.

*З*1. Из определения и T* => оператор нормален ⇔ в $\forall$ ОНБ его матрица нормальна.

T1. *Собственный вектор нормального оператора, отвечающий собственному значению λ, является собственным вектором сопряженного оператора, отвечающим собственному значению $\overline{\lambda}$.*

Док–во. Если $\mathcal{A}$ – нормальный, то $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}$ также нормален. Пусть x – собственный вектор $\mathcal{A}$, отвечающий λ => $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})x = \theta$ и $((\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})x, (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})x) = 0$.

Т.к. $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y)$, то $(x, (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^*(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})x) = 0$, с учетом нормальности $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}$: $(x, (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^* x)= 0$, т.е. $((\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^* x, (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^* x) = 0$ и $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^* x = \theta$ => по свойствам сопряжения $((\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$, $(\alpha\mathcal{A})^* = \overline{\alpha}\mathcal{A}^*)$: $(\mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\mathcal{I})x = \theta$, т.е. $\mathcal{A}^* x = \overline{\lambda}x$. •

C1. *Если $\mathcal{A}$ – нормальный, то* $\ker \mathcal{A} = \ker \mathcal{A}^*$ **(1)**

т.к. нетривиальные векторы ядра являются собственными векторами, отвечающими 0–ому собственному значению.

C2. *Если $\mathcal{A}$ – нормальный, то* $\ker \mathcal{A} = \operatorname{im}^{\perp}\mathcal{A}$, $\ker \mathcal{A}^* = \operatorname{im}^{\perp}\mathcal{A}^*$ (следует из $\ker \mathcal{A} = \operatorname{im}^{\perp}\mathcal{A}^*$, $\ker \mathcal{A}^* = \operatorname{im}^{\perp}\mathcal{A}$ и (1))

T2. *Собственные векторы нормального оператора, отвечающие различным собственным значениям, попарно ортогональны.*

Док–во. Пусть $\mathcal{A}x = \lambda x$, $\mathcal{A}y = \mu y$, $\lambda \neq \mu$ => $(\mathcal{A}x, y) =$ $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$. Но, $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y) = \{$в силу T1$\} =$ $(x, \overline{\mu}y) = \mu(x, y)$ => $\lambda(x, y) = \mu(x, y)$ и т.к. $\lambda \neq \mu$,то $(x, y)=0$. •

ОНБ унитарного (евклидова) пр–ва, в котором матрица ЛО имеет треугольную форму, называется ***базисом Шура*** для этого оператора.

T3 (критерий нормальности). *Оператор, действующий в унитарном пр–ве, нормален* ⇔ $\exists$ ОНБ *из собственных векторов этого оператора.*

Док–во. Необх–сть. Пусть $\mathcal{A}$ – нормальный оператор и e – его базис Шура (по теореме Шура (**) он $\exists$) =>

$$A_e = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ \dots a_{1n} \\ 0 & a_{22} \ \dots \ a_{2n} \\ & \dots \\ 0 & 0 \ \dots a_{nn} \end{bmatrix} \quad (A_e)^H = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & 0 \ \dots & 0 \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} \ \dots & 0 \\ & \dots & \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} \ \dots & \overline{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

и, по теореме (*) и З1, $A_e(A_e)^H = (A_e)^H A_e$. Для диа-гональных элементов матриц последнего равенства:

$|a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + … + |a_{1n}|^2 = |a_{11}|^2$, $|a_{22}|^2 + … + |a_{2n}|^2 = |a_{22}|^2$, $|a_{n-1,n-1}|^2 + |a_{n-1,n}| = |a_{n-1,n-1}|^2$

=> $a_{12} = a_{13} = … = a_{1n} = 0$, $a_{23} = a_{24} = … = a_{2n} = 0$, … , $a_{n-1,n} = 0$ => A_e имеет диагональную форму => базис Шура является ОНБ из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

Дост–сть. Пусть e – ОНБ из собственных векторов $\mathcal{A}$ =>

$$A_e = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & \dots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (A_e)^H = \begin{bmatrix} \overline{\lambda_1} & & 0 \\ & \overline{\lambda_2} & \\ & \dots & \\ 0 & & \overline{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

Из перестановочности диагональных матриц => A_e – нормальная матрица => по З1 $\mathcal{A}$ – нормальный оп–р. •

C3. *В унитарном пр–ве нормальный оператор $\mathcal{A}$ и его сопряженный $\mathcal{A}^*$ имеют общий ОНБ из собственных векторов.*

T4. *Если $\forall$ собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, действую–щего в унитарном пр–ве V, является собственным векто–ром сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$, то $\mathcal{A}$ – нормальный.*

Док–во. $\forall$ оператор, действующий в комплексном пр–ве, имеет хотя бы 1 собственный вектор. Пусть $\dim V = n$ и e_1 – собственный вектор оператора $\mathcal{A}$ => e_1 – собственный вектор оператора $\mathcal{A}^*$ и по T(3*) подпространство $L_{n-1} = \mathcal{L}^{\perp}(e_1)$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$. В этом подпространстве $\exists$ собственный вектор $e_2 \in L_{n-1}$ оператора $\mathcal{A}$, при этом $e_2 \perp e_1$. Вектор e_2 также является собственным вектором $\mathcal{A}^*$ и $\mathcal{L}(e_2)$ инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$ => $L_{n-2} = \mathcal{L}^{\perp}(e_2)$ (т.е. ортогональное дополнение $\mathcal{L}(e_2)$ до L_{n-1}) инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$. Поступая ан–но, построим ортогональную систему собственных векторов $e_1, … , e_n$ оператора $\mathcal{A}$ => векторы $e_1/|e_1|, . . . , e_n/|e_n|$ образуют ОНБ пр–ва V, состоящий из собственных векторов $\mathcal{A}$, и в силу T3 $\mathcal{A}$ – нормальный оператор. •

Подобные комплексные (вещественные) матрицы A и $B = Q^{-1}AQ$ называются ***унитарно* (*ортогонально*) *подобными***, если матрица преобразования подобия Q унитарна (ортогональна): $QQ^H = Q^H Q = I$ $(Q Q^T = Q^T Q = I)$. Соотношение подобия для унитарно подобных матриц A и B: $B = Q^H A Q$, для ортогонально подобных : $B = Q^T A Q$.

T5. *Квадратная комплексная матрица нормальна ⇔ она унитарно подобна диагональной матрице.*

Док–во. Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – заданная матрица. Рассмотрим $\forall$ унитарное пр–во V размерности n. Зафиксируем в V произвольный ОНБ f. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ – ЛО, матрица которого в базисе f совпадает с матрицей A : $A = A_f$ (по T(4*) такой оператор $\exists$). В силу T3 $\exists$ ОНБ e, в котором матрица A_e имеет диагональную форму. При переходе от базиса e к базису $f = eQ$ матрица оператора изменяется по закону $A_f = Q^{-1}A_e Q$. Это равносильно их подобию.•

***:** *В паре биортогональных базисов e и f унитарного (евклидова) пр–ва V матрицы операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ связаны соотношением* $(\mathcal{A}^*)_f = (A_e)^H$

**: *Для $\forall$ оператора, действующего в унитарном пр–ве, $\exists$ ОНБ, в котором он имеет треугольную матрицу.*

3*: *Если подпространство L инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$, то его ортогональное дополнение $L^{\perp}$ ин-вариантно относительно сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$.*

4*: *Пусть* $\dim V = n$, $\dim W = m$. *Тогда $\exists$ взаимно однозначное соответствие между ЛО из $\mathcal{L}(V, W)$ и матрицами из* $P^{m\times n}$

34. Блочно–диагональная форма вещественной нормальной матрицы.

Пусть V – унитарное или евклидово пр–во. ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ называется ***нормальным***, если $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$. Квадратная матрица A (комплексная или вещественная) называется ***нормальной,*** если $AA^H = A^HA$.

T1. *Собственные векторы нормального опера-тора, отвечающие различным собственным значениям, попарно ортогональны.*

T2 (критерий нормальности). *Оператор, действующий в унитарном пр–ве, нормален* ⇔ $\exists$ ОНБ *из собственных векторов этого оператора.*

Пусть e – ОНБ из собственных векторов нормального оператора $\mathcal{A}$, тогда

$$A_e = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & \dots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (A_e)^H = \begin{bmatrix} \overline{\lambda_1} & & 0 \\ & \overline{\lambda_2} & \\ & \dots & \\ 0 & & \overline{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

Пусть A – вещественная нормальная матрица. В силу нормальности, все жордановы клетки имеют порядок 1. Предположим , что $\lambda = a + \boldsymbol{i}b$ – собственное значение с ненулевой мнимой частью b, и пусть $A(x + \boldsymbol{i}y) = (a + \boldsymbol{i}b)(x + \boldsymbol{i}y) =$ $=(ax - by) + \boldsymbol{i}(bx + ay)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ =>

$$A[x, y] = [x, y]\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad (\mathbf{1})$$

Сопряженное число $\overline{\lambda} = a - \boldsymbol{i}b$ тоже будет собственным значением, отвечающим собственному вектору $x - \boldsymbol{i}y$. Для нормальной матрицы собственные векторы для различных собственных значений ортогональны =>

$(x + \boldsymbol{i}y, x - \boldsymbol{i}y) = (x, x) - (y, y) + 2\boldsymbol{i}(x, y)$ =>

$(x, y) = 0$, $|x| = |y|$

=> равенство (1) сохранится при замене на нормированные и ортогональные векторы x / s и y / s, $s = |x| = |y|$. Т.о. имеет место

T. *Для $\forall$ вещественной нормальной матрицы $\exists$ вещественный ОНБ, в котором она является прямой суммой вещественных блоков порядка 1 и вещественных блоков порядка 2 вида* $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

35. Эрмитовы операторы и эрмитовы матрицы. Эрмитово разложение ЛО.

Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$. Отображение $\mathcal{A}^*: W \to V$ называется ***сопряженным оператором*** к $\mathcal{A}$, если $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y)$, $\forall x \in V, y \in W$.

ЛО $\mathcal{A}$, действующий в унитарном (евклидовом) пр–ве, называется ***самосопряженным***, если $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. Само-сопряженный оператор в унитарном пр–ве называют ***эрмитовым***. Квадратная матрица A (комплексная или вещественная) называется ***самосопряженной***, если $A = A^H$. Комплексную самосопряженную матрицу называют ***эрмитовой***.

Из определения =>

1°. Эрмитов оператор нормален ($\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$)

2°. Оператор эрмитов ⇔ в $\forall$ ОНБ он имеет эмитову матрицу.

3°. Определитель эрмитова оператора веществен.

4°. Если подпространство L инвариантно относительно самосопряженного оператора $\mathcal{A}$, то $L^{\perp}$ также инвариантно относительно $\mathcal{A}$. Это следует из T(*Если подпространство L инвариантно отн–но оператора $\mathcal{A}$, то его ортогональное дополнение $L^{\perp}$ инвариантно отн–но сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$*).

5°. Эрмитов оператор на $\forall$ инвариантном подпрос-транстве индуцирует эрмитов оператор.

T1 (спектральная характеристика самосопряже–нного оператора). *Нормальный оператор в унитарном пр–ве эрмитов ⇔ все корни его характеристического многочлена вещественны.*

Док–во. Необх–сть. В унитарном пр–ве утверждение означает, что все собственные значения эрмитова оператора вещественны, и вытекает из $\mathcal{A}x = \lambda x$ и $\mathcal{A}x = \overline{\lambda}x$ с учетом T (*Собственный вектор нормаль–ного оператора, отвечающий собственному значению λ, является собственным вектором сопряженного оператора, отвечающим собственно-му значению $\overline{\lambda}$*).

Дост–сть. Пусть $\mathcal{A}$ – нормальный и все корни его характеристического многочлена вещественны => в унитарном пр–ве $\exists$ ОНБ $e_1,..., e_n$ из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Если $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ – $\forall$ вектор пр–ва, то $\mathcal{A}x = \sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_i e_i$ и $\mathcal{A}^*x = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{\lambda_i}e_i =$ $= \sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_i e_i$ т.к. $\lambda_i \in \mathbb{R}$ => $\mathcal{A}x = \mathcal{A}^*x$, $\forall x \in V$ => $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. •

Подобные комплексные матрицы A и $B = Q^{-1}AQ$ называются ***унитарно подобными***, если матрица преобразования подобия Q унитарна:. $Q Q^H = Q^HQ = I$. Соотношение подобия: $B = Q^H A Q$.

Из T1 => *оператор, действующий в унитарном пр–ве, эрмитов ⇔ $\exists$ ОНБ, в котором его матрица имеет вещественную диагональную форму,* или, в матричной формулировке: *квадратная комплексная матрица является эмитовой ⇔ она унитарно подобна вещественной диагональной матрице.*

ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ в унитарном пр–ве V называется ***косоэрмитовым***, если $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$. Квадратная комплексная матрица – ***косоэрмитова***, если $A^H = -A$.

Из определения => оператор $\mathcal{A}$ косоэрмитов ⇔ его матрица в $\forall$ ОНБ пр–ва косоэрмитова .

T2. *ЛО $\mathcal{A}$ в унитарном пр–ве эрмитов ⇔ оператор $i\mathcal{A}$ косоэрмитов.*

Док–во. По св–ву сопряжения $(i\mathcal{A})^* = -i\mathcal{A}^*$ => $(i\mathcal{A})^* = -i\mathcal{A}^*$ ⇔ $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. •

T3 (*эрмитово разложение ЛО*). *ЛО $\mathcal{A}$ в унитарном пр–ве можно представить, и притом единственным образом, в виде суммы эрмитова оператора $\mathcal{B}$ и косоэрмитова оператора $\mathcal{C}$:* $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$ **(1)**

Док–во. Положим $\mathcal{B} = ½(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*)$, $\mathcal{C} = ½(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)$ **(2)** => $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}$, $\mathcal{C}^* = -\mathcal{C}$ и $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$. Единственность такой пары операторов следует из того, что для $\forall$ другой пары операторов $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{C}_1$ таких, что $\mathcal{B}_1^* = \mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}_1^* = \mathcal{C}_1$ и $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1 + \mathcal{C}_1$ имеем $\mathcal{A}^* = \mathcal{B}_1 - \mathcal{C}_1$ или $½(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*) = \mathcal{B}_1$, $½(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*) = \mathcal{C}_1$ => в силу (2) $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$, $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$ •

T4. *ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ в унитарном пр–ве нормален ⇔ операторы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ в эрмитовом разложении* (1) *этого оператора перестановочны.*

Док–во. Если $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$, *то* $\mathcal{A}^* = \mathcal{B} - \mathcal{C}$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^2 - \mathcal{B}\mathcal{C} + \mathcal{C}\mathcal{B} - \mathcal{C}^2$, $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{B}^2 - \mathcal{C}\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{C} - \mathcal{C}^2$, т.е. $\mathcal{A}\mathcal{A}^* - \mathcal{A}^*\mathcal{A} = 2(\mathcal{C}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{C})$ => $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ ⇔ $\mathcal{C}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{C}$. •

36. Симметрические операторы и матрицы.

Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$. Отображение $\mathcal{A}^*: W \to V$ называется ***сопряженным оператором*** к *оператору* $\mathcal{A}$, если $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y)$, $\forall x \in V, y \in W$.

ЛО $\mathcal{A}$, действующий в унитарном (евклидовом) пр–ве, называется ***самосопряженным***, если $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. Самосопряженный оператор в евклидовом пр–ве называют ***симметрическим***. Квадратная матрица A (комплексная или вещественная) называется ***самосопряженной***, если $A = A^H$. Вещественная само–сопряженная матрица – ***симметрическая*** ($A = A^T$).

Из определения =>

1°.Симметрический оператор нормален ($\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$)
2°. Оператор является симметрическим ⇔ в ∀ ОНБ он имеет симметрическую матрицу.
3°. Определитель симметрического оператора веществен.
4°. Если подпространство L инвариантно отн–но симметрического оператора $\mathcal{A}$, то $L^\perp$ также инвариантно относительно $\mathcal{A}$. Это следует из Т(*Если подпространство L инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$, то его ортогональное дополнение $L^\perp$ инвариантно отн–но сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$*).
5°. Симметрический оператор на ∀ инвариантном подпространстве индуцирует симметрический оп–р.

Т1 (спектральная характеристика самосопря–женного оператора). *Нормальный оператор в евкли–довом пр–ве является симметрическим ⇔ все корни его характеристического многочлена вещественны.*

Док–во. Необх–сть. В унитарном пр–ве утверждение означает, что все собственные значения эрмитова оператора вещественны, и вытекает из $\mathcal{A}x = \lambda x$ и $\mathcal{A}x = \overline{\lambda}x$ с учетом Т (*Собственный вектор нормаль–ного оператора, отвечающий собственному значению λ, является собственным вектором сопряженного оператора, отвечающим собственно-му значению $\overline{\lambda}$*). Докажем для евклидова пр–ва E. Пусть e – ОНБ E, тогда A_e – самосопряженная (вещественная) матрица. Рассмотрим ∀ унитарное пр–во U ($\dim U = \dim E$), и в нем ∀ ОНБ f. Тогда матрице A_e отвечает самосопря–женный оператор $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(U, U)$, для которого A_e явля–ется матрицей в базисе f : $A_e = B_f$ => характеристи–ческие многочлены $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ совпадают и по доказанно–му выше (применительно к $\mathcal{B}$) все корни характери–стического многочлена оператора $\mathcal{A}$ вещественны.

Дост–сть. Пусть $\mathcal{A}$ – нормальный оператор и все корни его характеристического многочлена вещественны => в евклидовом пр–ве ∃ ОНБ $e_1,\ldots, e_n$ из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Если $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ – ∀ вектор пр–ва, то $\mathcal{A}x = \sum_{i=1}^n x_i\lambda_i e_i$ и $\mathcal{A}^*x = \sum_{i=1}^n x_i\overline{\lambda_i}e_i = \sum_{i=1}^n x_i\lambda_i e_i$ т.к. $\lambda_i \in \mathbb{R}$ => $\mathcal{A}x = \mathcal{A}^*x$, $\forall x \in V$ => $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. •

Подобные вещественные матрицы A и $B = Q^{-1}AQ$ ***ортогонально подобны***, если матрица преобразования подобия Q ортогональна: $QQ^T = Q^TQ = I$.
Соотношение подобия: $B = Q^TAQ$.

Из Т1 => *оператор, действующий в евклидовом пр–ве, является симметрическим ⇔ ∃ ОНБ, в котором его матрица имеет вещественную диагональную форму*, или : *квадратная вещественная матрица является симметрической ⇔ она унитарно подобна вещественной диагональной матрице.*

ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ в евклидовом пр–ве V ***кососимме–трический***, если $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$. Квадратная веществен. матрица ***кососимметрическая***, если $A^T = -A$.

Из определения => оператор $\mathcal{A}$ кососимметричен ⇔ его матрица в ∀ ОНБ пр–ва кососимметрична.

Т2(*эрмитово разложение ЛО*). *ЛО $\mathcal{A}$ в евклидовом пр–ве можно представить, и притом единственным образом, в виде суммы симметрического оператора $\mathcal{B}$ и кососимметрического оператора $\mathcal{C}$: $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$* **(1)**

Док–во. Положим $\mathcal{B} = ½(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*)$, $\mathcal{C} = ½(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)$ **(2)** => $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}$, $\mathcal{C}^* = -\mathcal{C}$ и $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$. Единственность такой пары операторов следует из того, что для ∀ другой пары операторов $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{C}_1$ таких, что $\mathcal{B}_1^* = \mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}_1^* = \mathcal{C}_1$ и $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1 + \mathcal{C}_1$ имеем $\mathcal{A}^* = \mathcal{B}_1 - \mathcal{C}_1$ или $½(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*) = \mathcal{B}_1$, $½(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*) = \mathcal{C}_1$ т.е. в силу (2) $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$, $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$ •

Т3. *ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ в евклидовом пр–ве нормален ⇔операторы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ в эрмитовом разложении* (1) *этого оператора перестановочны.*

Док–во. Если $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$, *то* $\mathcal{A}^* = \mathcal{B} - \mathcal{C}$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^2 - \mathcal{B}\mathcal{C} + \mathcal{C}\mathcal{B} - \mathcal{C}^2$, $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{B}^2 - \mathcal{C}\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{C} - \mathcal{C}^2$, т.е. $\mathcal{A}\mathcal{A}^* - \mathcal{A}^*\mathcal{A} = 2(\mathcal{C}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{C})$ => $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{C}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{C}$.

37. Унитарные операторы и унитарные матрицы.

ЛО $\mathcal{U}$, действующий в унитарном (евклидовом) пр–ве, – ***унитарный*** (***ортогональный***), если $\mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{I}$.
Из определения =>

1°. Оператор $\mathcal{U}$ унитарен (ортогонален) ⇔ в ∀ ОНБ он имеет унитарную (ортогональную) матрицу: $UU^H = U^HU = I$ ($UU^T = U^TU = I$)
2°. Для унитарного (ортогонального) $\mathcal{U}$: $|\det \mathcal{U}| = 1$
3°. Унитарный (ортогональный) оператор нормален, т.к. $\mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathcal{U}\mathcal{U}^*$

Т1 (критерии унитарности). *В унитарном* (*евклидо–вом*) *пр–ве V следующие утверждения равносильны:*
1) *оператор $\mathcal{U}$ унитарен (ортогонален);*
2) $\mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathcal{I}$
3) $\mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{I}$
4) *оператор $\mathcal{U}$ сохраняет скалярное произведение* : $(\mathcal{U}x, \mathcal{U}y) = (x, y)$ $\forall x, y \in V$
5) *оператор $\mathcal{U}$ сохраняет длину* : $|\mathcal{U}x| = |x|$, $\forall x \in V$
6) *оператор $\mathcal{U}$ переводит ∀ ОНБ V в ОНБ;*
7) *оператор $\mathcal{U}$ переводит хотя бы 1 ОНБ V в ОНБ.*

Док–во. 1 <=> 2 <=> 3. Из $\mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathcal{I}$ или $\mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{I}$ => невырожденность $\mathcal{U}$ и существование $\mathcal{U}^{-1}$. Умножение этих равенств на $\mathcal{U}^{-1}$ (справа или слева) приводит к $\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^{-1}$ => 2 => 1, 3 => 1. Переход 1 => 2, 1 => 3 из определения.
1 => 4. $\mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathcal{I}$ => $(\mathcal{U}x, \mathcal{U}y) = (x, \mathcal{U}^*\mathcal{U}y) = (x, y)$ $\forall x, y \in V$
4 => 1. $(x, \mathcal{U}^*\mathcal{U}y) = (\mathcal{U}x, \mathcal{U}y) = (x, y)$, $\forall x, y \in V$ => $\mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathcal{I}$ на основании Т (*Если $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – ЛО из $\mathcal{L}(V, W)$ и $(\mathcal{A}x, y) = (\mathcal{B}x, y)$, $\forall x \in V, y \in W$, то $\mathcal{A} = \mathcal{B}$*).
4 => 5. $|\mathcal{U}x| = \sqrt{(\mathcal{U}x, \mathcal{U}x)} = \sqrt{(x, x)} = |x|$ $\forall x \in V$
5 => 4. Это следует из соотношений:
$(x, y) = (|x + y|^2 - |x|^2 - |y|^2)/2$ в евклидовом пр–ве и
$(x, y) = (|x + y|^2 - |x - y|^2 + i\,|x + iy|^2 - i\,|x - iy|^2)/4$ в унитарном пр–ве.
4 => 6. Очевидно, т.к. $(\mathcal{U}e_i, \mathcal{U}e_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$
6 => 4. Если $e_1, \ldots, e_n$ – ОНБ V и $x = \sum_{i=1}^n x_ie_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_ie_i$, то $\mathcal{U}x = \sum_{i=1}^n x_i\mathcal{U}e_i$, $\mathcal{U}y = \sum_{i=1}^n y_i\mathcal{U}e_i$ и т.к. $\mathcal{U}e_1, \ldots, \mathcal{U}e_n$ – ОНБ, то, согласно (**), $(\mathcal{U}x, \mathcal{U}y) = \sum_{i=1}^n x_i\overline{y}_i = (x, y)$ $\forall x, y \in V$
6 => 7. Очевидно.
7 => 6. Этот переход доказан в п. 6 => 4. •

С. *Унитарный* (*ортогональный*) *оператор на ∀ инва–риантном подпространстве индуцирует унитарный* (*ортогональный*) *оператор,* т.к. сохраняет скалярное произведение ∀ пары векторов этого подпр–ва.

Т2 (спектральная характеристика унитарного оператора). *Нормальный оператор в унитарном пр–ве унитарен ⇔ все его собственные значения по модулю равны* 1.

Док–во. Необх–сть справедлива в унитарном и евклидовом пр–ве и означает, что все собственные значения унитарного (и ортогонального) оператора $\mathcal{U}$ по модулю равны 1. Докажем это. Пусть x – собствен–ный вектор оператора $\mathcal{U}$ и λ – отвечающее ему соб–ственное значение => $(\mathcal{U}x, \mathcal{U}x) = (\lambda x, \lambda y) = |\lambda|^2(x, x)$ Но $(\mathcal{U}x, \mathcal{U}x) = (x, \mathcal{U}^*\mathcal{U}x) = (x, x)$ => $|\lambda| = 1$.
Дост–сть. Если $\mathcal{U}$ – нормальный оператор, то по критерию нормальности (*Оператор, действующий в унитарном пр–ве, нормален ⇔ ∃ ОНБ из собственных векторов этого оператора*) в пр–ве V ∃ ОНБ $e_1, \ldots, e_n$ из собственных векторов оператора $\mathcal{U}$ => для $\forall x = \sum_{i=1}^n x_ie_i \in V$: $\mathcal{U}x = \sum_{i=1}^n x_i\lambda_ie_i$, $|\lambda_i| = 1$, $i = \overline{1, n}$. В силу ортонормированности базиса e согласно (**) => $(x, x) = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$ и $(\mathcal{U}x, \mathcal{U}x) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2|x_i|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$ => $|\mathcal{U}x| = |x|$, $\forall x \in V$, и $\mathcal{U}$ – унитарный оператор (из Т1: 5 =>1). •

Т3. *Если подпространство L инвариантно отн–но унитарного (ортогонального) оператора $\mathcal{U}$, то его ортогональное дополнение $L^\perp$ также инвариантно относительно $\mathcal{U}$.*

Док–во. Пусть $y \in L^\perp$. Покажем, что $\mathcal{U}y \in L^\perp$, т.е. $(x, \mathcal{U}y) = 0$, $\forall x \in L$. Оператор $\mathcal{U}$ индуцирует на подпространстве L унитарный (ортогональный) оператор $\mathcal{U}|L$ => оператор $\mathcal{U}|L$ обратим и его образ совпадает со всем подпространством L, т.е. $\operatorname{im} \mathcal{U}|L = L$ (T*) => для $\forall x \in L$ $\exists x_1 \in L : x = \mathcal{U}x_1$ => $(x, \mathcal{U}y) = (\mathcal{U}x_1, \mathcal{U}y) = (x_1, y) = 0$, т.к. $x_1 \in L$, $y \in L^\perp$. •

Из того что унитарный оператор нормален и все его собственные значения по модулю = 1 => в *пр–ве V* ∃ ОНБ *e, в котором матрица унитарного оператора $\mathcal{U}$ имеет диагональную форму*

$$U_e = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & \ldots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \text{где } |\lambda_i| = 1,\ i = \overline{1, n}$$

или: *квадратная комплексная матрица унитарна ⇔ когда она унитарно подобна диагональной матрице, у которой все диагональные элементы по модулю* = 1.

***:** *В конечномерном пр–ве V следующие утверждения равносильны: для $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$*
1) $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{I}$ 5) $\det \mathcal{A} \neq 0$
2) $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{I}$ 6) *$\mathcal{A}$ обратим;*
3) *$\mathcal{A}$ не вырожден* 7) *$\mathcal{A}$ биективен.*
4) $\operatorname{im} \mathcal{A} = V$

: *В евклидовом (унитарном) пр–ве скалярное произведение векторов $x = \sum_{i=1}^n x_ie_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_ie_i$, заданных своими координатами в базисе e, вычисляется по правилу $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i\overline{y}_i$* ⇔ *e* – ОНБ

38. Блочно –диагональная форма ортогонал. матрицы.

ЛО $\mathcal{Q}$, действующий в евклидовом пр–ве, называется ***ортогональным***, если $\mathcal{Q}^*\mathcal{Q} = \mathcal{Q}\mathcal{Q}^* = \mathcal{I}$. Из определения:
1°. Оператор $\mathcal{Q}$ ортогонален ⇔ в ∀ ОНБ он имеет ортогональную матрицу: $QQ^T = Q^TQ = I$
2°. Для ортогонального оператора $\mathcal{Q}$ $|\det \mathcal{Q}| = 1$ **(1)**
3°. Ортогональный оператор нормален, т.к. $\mathcal{Q}^*\mathcal{Q} = \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*$

Пусть $\mathcal{Q}$ – ортогональный оператор, действующий в евклидовом пр–ве E. По Т (*Нормальный оператор в унитарном пр–ве унитарен ⇔ все его собственные значения по модулю равны* 1) и равенству (1) для его собственных значений λ и определителя (т.к. $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det \mathcal{Q} \in \mathbb{R}$) имеем: $\lambda = \pm1$, $\det \mathcal{Q} = \pm1$ **(2)**

В ∀ ОНБ e оператор $\mathcal{Q}$ имеет ортогональную матрицу Q_e => $Q_e^{-1} = Q_e^T$ **(3)**

1. В 1–мерном пр–ве матрица ортогонального оператора $\mathcal{Q}$ имеет вид: $Q_e = [\pm1]$ **(4)** => $Q_e = I$ либо $Q_e = -I$.
2. В 2–мерном пространстве матрица ортогонального оператора $\mathcal{Q}$ имеет вид: $Q_e = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$,

причем в силу (3) $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$, и, с учетом (2) и $Q^{-1} = \frac{1}{|Q|}\hat{Q}$, где $\hat{Q}$ – присоединенная матрица имеем

$\pm\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$ **(5)**

а) Если $\det \mathcal{Q} = 1$, то (5) означает $\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$ =>

$Q_e = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

Положив $\alpha = \cos\varphi$, $\beta = -\sin\varphi$, получим

$Q_e = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$ **(6)**

б)Если $\det \mathcal{Q} = -1$, то (5) означает $\begin{bmatrix} -\delta & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$ =>

$Q_e = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$; при этом $f(\lambda) = \det(Q_e - \lambda I) = \lambda^2 - 1$ => оператор $\mathcal{Q}$ в 2–мерном пространстве имеет 2 различных собственных значения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, и для него ∃ ОНБ f, в котором его матрица имеет вид

$Q_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ **(7)**

Т1. *Для ∀ ортогонального оператора $\mathcal{Q}$ в евклидовом пр–ве* ∃ ОНБ *e, в котором его матрица имеет квазидиагональную форму с клетками вида* (4) *и* (6) *на главной диагонали.*

Док–во. Индукция по размерности n пр–ва V. Для $n = 1, 2$ Т1 вытекает из (4), (6), (7). Пусть $n \geq 3$ и Т1 верна для ортогональных операторов в пр–вах $\dim = k < (n - 1)$. Докажем Т1 для $\dim = n$. По Т(У *всякого ЛО в веще-ственном пр–ве ∃ 1–мерное или 2–мерное инвариантное подпространство*) для оператора $\mathcal{Q}$ ∃ 1–мерное либо 2–мерное инвариантное подпространство L. Если $\dim L = 1$, то $\mathcal{Q}|L$ – ортогональный оператор (*ортогональный оператор на ∀ инвариантном подпространстве индуцирует ортогональный оператор,* т.к. сохраняет скалярное произведение) в 1–мерном пр–ве и в ОНБ e_1 пр–ва L его матрица имеет вид (4). Если же $\dim L = 2$, то $\mathcal{Q}|L$ – ортогональный оператор в 2–мерном пр–ве и в ОНБ e_1, e_2 пр–ва L его матрица имеет вид (6) или (7). По Т(*Если подпространство L инвариантно отн–но ортогонального оператора $\mathcal{Q}$, то его ортогональное дополнение $L^\perp$ также инвариантно относительно $\mathcal{Q}$*) ортогональное допол–нение $L^\perp$ инвариантно отн–но оператора $\mathcal{Q}$. По индуктив–ному предположению в пр–ве $L^\perp$ ∃ ОНБ $e_2, \ldots, e_n$ (или $e_3, \ldots, e_n$), в котором матрица оператора $\mathcal{Q}|L^\perp$ имеет требуемый вид. Тогда в базисе $e_1, \ldots, e_n$ матрица оператора $\mathcal{Q}$ также будет иметь требуемый вид. •

После перестановки векторов построенного базиса мат-рица ортогонального оператора $\mathcal{Q}$ будет иметь вид

$$U_e = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & \begin{matrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{matrix} & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & \begin{matrix} \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k \\ \sin\varphi_k & \cos\varphi_k \end{matrix} \end{bmatrix} \quad (\mathbf{8})$$

Матрица (8) – ***каноническая формай*** *матрицы ор-тогонального оператора.* ***Простое вращение*** – оператор в евклидовом пр–ве, имеющий в некотором ОНБ матрицу: а

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \begin{matrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{matrix} & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{9})$$

Простое отражение – оператор в евклидовом пр–ве, который в некотором ОНБ имеет матрицу вида

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{10})$$

Из определения => простое вращение и простое отражение – ортогональные операторы, т.к. их матрицы (9) и (10) в ОНБ ортогональны. Простое вращение – это поворот в некоторой 2–мерной плоскости, оставляет неизменным ($n - 2$)–мерное подпространство, ортогональное этой плоскости. Простое отражение меняет направление всех векторов некоторого 1-мерного подпространства и не изменяет его ($n - 1$)–мерное ортогональное дополнение.

Т2. *Всякий ортогональный оператор можно представить как произведение некоторого числа простых вращений и простых отражений.*
=> из того, что матрицу вида (8) можно представить в виде произведения некоторого числа матриц вида (9), (10). •

39. Знакоопределенные операторы и матрицы. Квадратный корень из оператора.

Т1. *Если в унитарном пр–ве V для ∀ x выполняется равенство* $(x, \mathcal{B}x) = 0$, *то* $\mathcal{B} = \mathcal{O}$.

Док–во. Для ∀ $y, z \in V$ имеем $(\mathcal{B}(y + z), y + z) = 0$ и $(\mathcal{B}(iy + z), iy + z) = 0$, т.е. $(\mathcal{B}y, y) + (\mathcal{B}z, y) + (\mathcal{B}y, z) + (\mathcal{B}z, z) = 0$, $(\mathcal{B}y, y) - i(\mathcal{B}z, y) + i(\mathcal{B}y, z) + (\mathcal{B}z, z) = 0$ или, с учетом условия теоремы, $(\mathcal{B}z, y) + (\mathcal{B}y, z) = 0$, $-i(\mathcal{B}z, y) + i(\mathcal{B}y, z) = 0$. Прибавим к 1–му равенству 2–е, умноженное на i : $(\mathcal{B}y, z) = 0$ $\forall y, z \in V$ => $\mathcal{B} = \mathcal{O}$ (Т (*Если $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – ЛО из $\mathcal{L}(V, W)$ и $(\mathcal{A}x, y) = (\mathcal{B}x, y)$, $\forall x \in V, y \in W$, то $\mathcal{A} = \mathcal{B}$*)). •

ЛО $\mathcal{A}$, действующий в унитарном (евклидовом) пр–ве, называется ***самосопряженным***, если $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. Само-сопряженный оператор в унитарном пр–ве – ***эрмитов***

Т2. *ЛО $\mathcal{A}$ в унитарном пр–ве V эрмитов ⇔* $(\mathcal{A}x, x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in V$ **(1)**

Док–во. Необх–сть. Если $\mathcal{A}$ – эрмитов оператор, то $(\mathcal{A}x, x) = (x, \mathcal{A}^*x) = (x, \mathcal{A}x)$, $\forall x \in V$ => $(\mathcal{A}x, x) = \overline{(\mathcal{A}x, x)}$ и $(\mathcal{A}x, x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in V$.
Дост–сть. Пусть $(\mathcal{A}x, x) \in \mathbb{R}$ => $(\mathcal{A}x, x) = (x, \mathcal{A}x)$ и $(\mathcal{A}x, x) = (x, \mathcal{A}^*x)$ => $(x, (\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)x) = 0$ $\forall x \in V$ => по Т1 $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. •

Самосопряженный оператор в унитарном (евкли–довом) пр–ве называется ***положительно определенным***, если $(\mathcal{A}x, x) > 0$ $\forall x \neq \theta$, *неотрицательно определенным (отрицательно определенным* или *неположительно определенным),* если $(\mathcal{A}x, x) \geq 0$ $\forall x \neq \theta$ (соответственно $(\mathcal{A}x, x) < 0$ или $(\mathcal{A}x, x) \leq 0$): $\mathcal{A} > \mathcal{O}$, $\mathcal{A} \geq \mathcal{O}$, $\mathcal{A} < \mathcal{O}$, $\mathcal{A} \leq \mathcal{O}$.

Т3. *Самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ в унитарном* (*и евклидовом*) *пр–ве положительно определен* ($\mathcal{A} \geq \mathcal{O}$, $\mathcal{A} < \mathcal{O}$, $\mathcal{A} \leq \mathcal{O}$) ⇔ *все его собственные значения* $\lambda > 0$ ($\lambda \geq 0$, $\lambda < 0$, $\lambda \leq 0$).

Док–во. (для $\mathcal{A} > \mathcal{O}$). *Необх–сть*. Если $\mathcal{A} > \mathcal{O}$, то $(\mathcal{A}x, x) > 0$ $\forall x \neq \theta$ => это верно и для собственного вектора x => $(\mathcal{A}x, x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x) > 0$, где $(x, x) > 0$ => $\lambda > 0$.
Дост–сть. Если $\mathcal{A}$ – самосопряженный, то ∃ ОНБ из собственных векторов $e_1, \ldots, e_n$ оператора $\mathcal{A}$. При этом соответствующие собственные значения $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1, n}$ =>для $\forall x = \sum_{i=1}^n x_ie_i \neq \theta$ имеем

$$(\mathcal{A}x, x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\lambda_ie_i, \sum_{i=1}^n x_ie_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i|x_i|^2 > 0 \quad \bullet$$

С. *Если $\mathcal{A} > \mathcal{O}$ (или $\mathcal{A} < \mathcal{O}$), то $\mathcal{A}$ обратим,* так как $\det \mathcal{A} = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$.

Т4. *Оператор, обратный к положительно* (*отрицательно*) *определенному оператору, положительно* (*отрицательно*) *определен.*

Док–во. Если $\mathcal{A}$ – самосопряженный оп–р, то $\mathcal{A}^{-1}$ – тоже самосопряженный оп–р, т.к. согласно свойствам сопряжения $(\mathcal{A}^{-1})^* = (\mathcal{A}^*)^{-1} = \mathcal{A}^{-1}$. Если $\mathcal{A} > \mathcal{O}$ ($\mathcal{A} < \mathcal{O}$), то все собственные значения оператора $\mathcal{A}^{-1}$ положительны (отрицательны), т.к. они обратны соб–ственным значениям $\mathcal{A}$. Из Т3 => $\mathcal{A}^{-1} > \mathcal{O}$ ($\mathcal{A}^{-1} < \mathcal{O}$). •

Т5. *Для ∀ неотрицательно* (*положительно*) *опреде–ленного оператора $\mathcal{A}$ ∃ ! неотрицательно* (*положи–тельно*) *определенный оператор $\mathcal{B}$ такой, что $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$*

Док–во. Существование. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – ОНБ из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}e_i = \lambda_ie_i$, $i = \overline{1, n}$. По условию $\lambda_i \geq 0$ ($\lambda_i > 0$), $i = \overline{1, n}$. Положим

$$\mathcal{B}e_i = \sqrt{\lambda_i}\,e_i,\ i = \overline{1, n} \quad \mathbf{(3)}$$

Из (3) => $\mathcal{B} \geq \mathcal{O}$ ($\mathcal{B} > \mathcal{O}$), т.к. $\mathcal{B}$ – нормальный (ибо ∃ ОНБ $e_1, \ldots, e_n$ из собственных векторов $\mathcal{B}$), при этом он самосопряжен (ибо его собственные значения $\sqrt{\lambda_i} \in \mathbb{R}$) и, кроме того, $\sqrt{\lambda_i} \geq 0$ ($\sqrt{\lambda_i} > 0$). Оператор B – искомый, т.к. в силу (3) $\mathcal{B}^2e_i = \lambda_ie_i = \mathcal{A}e_i$, $i = \overline{1, n}$.
Единственность. Пусть ∃ другой оператор $\mathcal{C} \geq \mathcal{O}$ ($\mathcal{C} > \mathcal{O}$): $\mathcal{C}^2 = \mathcal{A}$. Тогда ∃ ОНБ $f_1, \ldots, f_n$ из собственных векторов оператора $\mathcal{C}$. Если $\mathcal{C}f_i = \mu_if_i$, $i = \overline{1, n}$, то $\mathcal{A}f_i = \mathcal{C}^2f_i = \mu_i^2f_i$, $i = \overline{1, n}$ => μ_i^2 являются собственны–ми значениями $\mathcal{A}$ => совпадают с числами λ_i. Покажем, что $\mathcal{C}e_i = \sqrt{\lambda_i}\,e_i$, $i = \overline{1, n}$ **(4)** этим в силу (3) будет доказано, что $\mathcal{C} = \mathcal{B}$. Разложим вектор e_i по базису f : $e_i = \sum_{k=1}^n \alpha_kf_k$ **(5)**
В этом равенстве участвуют собственные векторы $e_i, f_1, \ldots, f_n$ оператора $\mathcal{A}$, отвечающие собственным значениям $\lambda_i, \mu_1^2, \ldots, \mu_n^2$. Из линейной независимости собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям => в разложении (5) отлич–ными от 0 будут коэффициенты α_k лишь при тех f_k, которые отвечают собственному значению $\mu_k^2 = \lambda_i$ =>

$$\mathcal{C}e_i = \sum_{k=1}^n \alpha_k\mathcal{C}f_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k\sqrt{\lambda_i}f_k = \sqrt{\lambda_i}\sum_{k=1}^n \alpha_kf_k = \sqrt{\lambda_i}e_i, \text{ т.е. (4)}$$

Оператор $\mathcal{B}$ называется ***квадратным корнем из оператора $\mathcal{A}$***.

40. Сингулярные числа и сингулярные векторы. Полярное разложение оператора.

Т1. *$\forall$ оператор $\mathcal{A}$ в унитарном (евклидовом) пр–ве можно представить в виде произведения неотрица–тельного оператора $\mathcal{B}$ и унитарного оператора $\mathcal{U}$:*

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{U} \qquad \textbf{(1)}$$

При этом оператор $\mathcal{B}$ определен однозначно, а если $\mathcal{A}$ обратим, то и оператор $\mathcal{U}$ определен однозначно.

Док–во. 1. Рассмотрим оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$.

а) $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ – самосопряженный, т.к. $(\mathcal{A}^*\mathcal{A})^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$.

б) $\mathcal{A}^*\mathcal{A} > \mathcal{O}$, т.к. $(\mathcal{A}^*\mathcal{A}x, x) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) > 0$, $\forall x \neq \theta$.

в) $\exists$ ОНБ пр–ва из собственных векторов $e_1, \ldots, e_n$ оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$. При этом можно считать, что векторы $e_1, \ldots, e_r$ отвечают ненулевым собственным значениям $\rho_1^2, \ldots, \rho_r^2$, а остальные – нулевым, так что $\rho_k > 0$ при $k \le r$ и $\rho_k = 0$ при $k > r$. **(2)**

$$r = \mathrm{rg}\, \mathcal{A}^*\mathcal{A} \quad \textbf{(3)}$$

2. $\mathrm{im}\, \mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n)$. Для векторов $\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n$

$$(\mathcal{A}e_i, \mathcal{A}e_j) = (\mathcal{A}^*\mathcal{A}e_i, e_j) = (\rho_i^2 e_i, e_j) = \begin{cases}\rho_i^2, & i = j\\ 0, & i \neq j\end{cases}$$

$\Rightarrow \mathcal{A}e_{r+1} = \ldots \mathcal{A}e_n = \theta$ (в силу (3)), а $\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_r$ – ненулевые попарно ортогональные векторы, причем $|\mathcal{A}e_k| = \rho_k$, $k = \overline{1,r} \Rightarrow g_k = \frac{1}{\rho_k}\mathcal{A}e_k$, $k = \overline{1,r}$ **(4)**

образуют ОНБ $\mathrm{im}\, \mathcal{A} \Rightarrow$ получено $r = \mathrm{rg}\, \mathcal{A}$ **(5)**

(т.к. $\dim \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k) = \mathrm{rg}\,(a_1, \ldots, a_k)$)

Дополним $g_1, \ldots, g_r$ до ОНБ $g_1, \ldots, g_r, g_{r+1}, \ldots, g_n$ всего пр–ва $\Rightarrow$ из (4) и (2): $\mathcal{A}e_k = \rho_k g_k$, $k = \overline{1,n}$ **(6)**

3. Построим операторы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{U}$ из (1). Положим

$$\mathcal{U}e_k = g_k, \quad \mathcal{B}g_k = \rho_k g_k, \; k = \overline{1,n} \quad \textbf{(7)}$$

Тогда $\mathcal{U}$ – унитарный оператор, т.к. переводит ОНБ e в ОНБ g; $\mathcal{B} \ge \mathcal{O}$ как нормальный оператор (ибо ОНБ g состоит из его собственных векторов), собственные значения которого $\rho_k \ge 0$, $k = \overline{1,n}$.

При этом $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{U}$, т.к., согласно (6) и (7), $(\mathcal{B}\mathcal{U})e_k = \mathcal{B}(\mathcal{U})e_k = \mathcal{B}g_k = \rho_k g_k = \mathcal{A}e_k$, $k = \overline{1,n}$

4. Докажем единственность. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{U}$ – разложение (1) для $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A}^* = \mathcal{U}^*\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^2$ $\Rightarrow \mathcal{B}$ – квадратный корень из $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$, который $\exists$ и определен однозначно по Т (*Для $\forall$ неотрицательно* (*положительно*) *определенного оператора $\mathcal{A}$ $\exists$! неотрицательно* (*положительно*) *определенный оператор $\mathcal{B}$: $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$*). Если $\mathcal{A}$ обратим, то из (3) и (5) $\Rightarrow$ обратим $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$, при этом $\rho_k \neq 0$, $k = \overline{1,n}$, $\Rightarrow$ согласно (7) обратим $\mathcal{B}$. В силу (1) отсюда $\Rightarrow \mathcal{U} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$. •

Попутно доказаны следующие факты:

а) $\mathrm{rg}\, \mathcal{A} = \mathrm{rg}\, \mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathrm{rg}\, \mathcal{A}\mathcal{A}^*$ (из (3), (5) и $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^2$)

б) оператор $\mathcal{U}$ переводит ОНБ из собственных векторов оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ в ОНБ из собственных векторов оператора $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ (из (7));

в) операторы $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ имеют одинаковые собственные значения (из $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^2$).

Арифметические значения квадратных корней из собственных значений оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ называются ***сингулярными числами*** оператора $\mathcal{A}$. Разложение (2) называется ***полярным разложением оператора $\mathcal{A}$***.

З. Для $\forall$ $\mathcal{A}$ имеет место разложение вида $\mathcal{A} = \mathcal{V}\mathcal{C}$, где $\mathcal{V}$ – унитарный оператор, $\mathcal{C} \ge \mathcal{O}$. Его можно получить из полярного разложения сопряженного оператора $\mathcal{A}^* = \mathcal{B}\mathcal{U}$ переходом к оператору $\mathcal{A}$: $\mathcal{A} = \mathcal{U}^*\mathcal{B}$, где $\mathcal{U}^*$ – унитарный оператор.

Т2. *Оператор $\mathcal{A}$ нормален $\Leftrightarrow$ в любом его полярном разложении операторы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{U}$ перестановочны.*

Док–во. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{U}$ – полярное разложение $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^2$, $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{U}^*\mathcal{B}^2\mathcal{U}$.

Дост–сть. Если $\mathcal{B}\mathcal{U} = \mathcal{U}\mathcal{B}$, то $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{U}^*\mathcal{B}^2\mathcal{U} =$
$= \mathcal{U}^*\mathcal{B}(\mathcal{B}\mathcal{U}) = \mathcal{U}^*\mathcal{B}(\mathcal{U}\mathcal{B}) = \mathcal{U}^*(\mathcal{B}\mathcal{U})\mathcal{B} =$
$= \mathcal{U}^*(\mathcal{U}\mathcal{B})\mathcal{B} = \mathcal{U}^*\mathcal{U}\mathcal{B}^2 = \mathcal{B}^2 = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$

Необх–сть. Если $e_1, \ldots, e_n$ – ОНБ из собственных векторов $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}^*\mathcal{A}e_k = \rho_k^2 e_k$, $k = \overline{1,n}$ **(8)**

С др. стороны, $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{U}^*\mathcal{B}^2\mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U}^*\mathcal{B}^2\mathcal{U}e_k = \rho_k^2 e_k$, т.е. $\mathcal{B}^2\mathcal{U}e_k = \rho_k^2\,\mathcal{U}e_k$, $k = \overline{1,n}$ **(9)**

Т.к. $\mathcal{U}$ унитарен, то векторы $\mathcal{U}e_1, \ldots, \mathcal{U}e_n$ образуют ОНБ $\Rightarrow$ из (9) получим $\mathcal{B}\mathcal{U}e_k = \rho_k\,\mathcal{U}e_k$, $k = \overline{1,n}$ **(10)**

С другой стороны, $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^2$, и согласно (8) $\mathcal{B}^2 e_k = \rho_k^2 e_k$ или $\mathcal{B}e_k = \rho_k e_k$, откуда умножением на $\mathcal{U}$ слева получим, что $\mathcal{U}\mathcal{B}e_k = \rho_k\,\mathcal{U}e_k$, $k = \overline{1,n}$ **(11)**

Из (10) и (11) $\Rightarrow \mathcal{B}\mathcal{U} = \mathcal{U}\mathcal{B}$.

41. Ортогональные дополнения ядра и образа ЛО. Теорема и альтернатива Фредгольма.

Пусть L – линейное подпространство евклидова (унитарного) пр–ва E (U). Вектор x называется ***ортогональным к подпространству*** L ($x \perp L$), если он ортогонален $\forall y \in L$. $x \perp \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k) \Leftrightarrow x \perp a_i$, $i = \overline{1,k}$. Совокупность всех векторов $x \in E$ (U), ортогональных подпространству L, называется ***ортогональным дополнением*** $L^{\perp}$ к L. ***Образ ЛО*** $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ – $\mathrm{im}\, \mathcal{A} = \{y \in W \mid \exists x \in V : \mathcal{A}x = y\}$, ***ядро ЛО*** $\mathcal{A}$ – $\ker \mathcal{A} = \{x \in V \mid \mathcal{A}x = \theta\}$

Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$. Отображение $\mathcal{A}^* : W \to V$ называется ***сопряженным оператором*** к *оператору* $\mathcal{A}$, если $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y)$, $\forall x \in V, y \in W$

Т1. *Для $\forall$ оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$:*

$$\ker \mathcal{A} = \mathrm{im}^{\perp}\, \mathcal{A}^*, \quad \ker \mathcal{A}^* = \mathrm{im}^{\perp}\, \mathcal{A} \qquad \textbf{(1)}$$

Док–во. Для $\forall$ векторов $x \in \ker \mathcal{A}$, $y \in \mathrm{im}\, \mathcal{A}^*$ имеем $\mathcal{A}x = \theta$, $y = \mathcal{A}^*y_1 \Rightarrow (x, y) = (x, \mathcal{A}^*y_1) = = (\mathcal{A}x, y_1) = 0$. $\Rightarrow \ker \mathcal{A} \subset \mathrm{im}^{\perp}\, \mathcal{A}^*$. По теореме о ранге и дефекте $\mathrm{rg}\, \mathcal{A} + \mathrm{def}\, \mathcal{A} = \dim V$ и т.к. $\mathrm{rg}\, \mathcal{A}^* = \mathrm{rg}\, \mathcal{A}$, то $\dim \ker \mathcal{A} =$ $= \dim V - \dim \mathrm{im}\, \mathcal{A} = \dim V - \dim \mathrm{im}\, \mathcal{A}^* = \dim \mathrm{im}^{\perp}\, \mathcal{A}^*$. Тогда $\ker \mathcal{A} = \mathrm{im}^{\perp}\, \mathcal{A}^*$ по Т о монотонности размер–ности (*Размерность линейного подпространства не превосходит размерности пр–ва. Подпространство той же размерности, что и все пр–во, совпадает с пр–вом*). 2–е доказывается ан–но. •

Т1 (формулировка от Тырт–ва). *Пусть $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Тогда $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^m$ представляются ортогональными суммами*: $\mathbb{C}^n = \ker A \oplus \mathrm{im}\, A^*$, $\mathbb{C}^m = \ker A^* \oplus \mathrm{im}\, A$. (Док–во то же самое)

Т2. *Если подпространство L инвариантно отн–но оператора $\mathcal{A}$, то его ортогональное дополнение $L^{\perp}$ инвариантно отн–но сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$.*

Док–во. Если $x \in L$, $y \in L^{\perp}$ и т.к. L инвариантно отн–но $\mathcal{A}$, т.е. $\mathcal{A}x \in L$, то $(\mathcal{A}x, y) = 0$. С другой стороны, $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y) \Rightarrow (x, \mathcal{A}^*y) = 0$, $\forall x \in L \Rightarrow \mathcal{A}^*y \in L^{\perp}$. •

Пусть V, W – евклидовы (унитарные) пр–ва, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, $u \in W$. Уравнение $\mathcal{A}z = u$ **(2)** называется ***линейным операторным уравнением***, вектор u – *правой частью*, вектор z – *решением*. В матричной записи операторное уравнение превращается в систему линейных алгебраических уравнений $\Rightarrow$ все свойства систем уравнений можно переносить на операторные уравнения и наоборот. ***Сопряженным*** *к* уравнению (2) называется однородное уравнение $\mathcal{A}^*w = \theta$ **(3)**

Т3 (альтернатива Фредгольма). *Либо основное уравнение* (2) *имеет решение при $\forall$ правой части $u \in W$, либо сопряженное к нему уравнение имеет нетривиальное решение.*

Док–во. Пусть $r = \mathrm{rg}\, \mathcal{A}$, $n = \dim W$. 2 случая.

1) $r = n \Leftrightarrow \mathrm{im}\, \mathcal{A} = W$, $\Rightarrow$ уравнение (2) имеет решение при $\forall u \in W$. Тт.к. $\mathrm{rg}\, \mathcal{A}^* = \mathrm{rg}\, \mathcal{A}$, то $\ker \mathcal{A}^* = \{\theta\}$ и уравнение (3) не имеет ненулевого решения.

2) $r < n \Leftrightarrow \mathrm{def}\, \mathcal{A}^* > 0$, $\exists\, w \in \ker \mathcal{A}^*$, $w \neq \theta$, т.е. $\exists$ ненулевое решение (3). При этом $\mathrm{im}\, \mathcal{A} \neq W$ и уравнение (2) имеет решение **не** для $\forall u \in W$. •

З1. Альтернатива Фредгольма для оператора $\mathcal{A}$, действующего в одном пр–ве V, означает, что либо основное уравнение имеет единственное решение при $\forall u \in V$, либо сопряженное к нему уравнение имеет нетривиальное решение.

Т4 (теорема Фредгольма). *Операторное уравнение* (2) *имеет решение $\Leftrightarrow$ его правая часть ортогональна всем решениям сопряженного уравнения.*

Док–во. Уравнение (2) имеет решение $\Leftrightarrow u \in \mathrm{im}\, \mathcal{A}$ или, с учетом (2), когда $u \in \ker^{\perp}\mathcal{A}^* \Leftrightarrow$ вектор u ортогонален всем векторам $\ker^{\perp}\mathcal{A}^*$, т.е. решениям уравнения (3).

42. Билинейные и квадратичные формы.

Пусть V – линейное пр–во над полем P. Отображение $\mathcal{A} : V \times V \to P$ – ***билинейная форма*** (БФ) в пр–ве V, если для $\forall x, y, z \in V$, $\alpha \in P$:

1) $\mathcal{A}(x + y, z) = \mathcal{A}(x, z) + \mathcal{A}(y, z)$; 3) $\mathcal{A}(x, y + z) = \mathcal{A}(x, y) + \mathcal{A}(x, z)$;
2) $\mathcal{A}(\alpha x, y) = \alpha\, \mathcal{A}(x, y)$; 4) $\mathcal{A}(x, \alpha y) = \alpha \mathcal{A}(x, y)$. **(1)**

БФ называется ***симметричной***, если $\mathcal{A}(x, y) = \mathcal{A}(y, x)$, $\forall x, y \in V$.

Пр. 1) в n–мерном пр–ве V с базисом $e_1, \ldots, e_n$ отображение $\mathcal{A} : V \times V \to P$:

$$\mathcal{A}(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j \qquad \textbf{(2)}$$

$\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, a_{ij} ($i, j = \overline{1,n}$) – фиксированные числа **Т1**. *Пусть V – линейное пр–во над полем P и $e_1, \ldots, e_n$ – базис V. Для $\forall a_{ij} \in P$, $i, j = \overline{1,n}$, $\exists$! БФ $\mathcal{A}(x, y)$ в пр–ве V: $\mathcal{A}(e_i, e_j) = a_{ij}$, $i, j = \overline{1,n}$.*

Док–во. $e_1, \ldots, e_n$ – базис пр–ва V и a_{ij}, $i, j = \overline{1,n}$, – заданные числа. (2) – БФ в V, причем $\mathcal{A}(e_i, e_j) = a_{ij}$, $i, j = \overline{1,n}$. $\forall$ БФ $\mathcal{B}(x, y)$ в V: $\mathcal{B}(e_i, e_j) = a_{ij}$, $i, j = \overline{1,n}$, совпадает с $\mathcal{A}(x, y)$, т.к. для $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ из (1): $\mathcal{B}(x, y) = \mathcal{B}(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j\, \mathcal{B}(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i y_j \Rightarrow$ $\mathcal{B}(x, y) = \mathcal{A}(x, y)$, $\forall x, y \in V$. •

(2) – ***общий вид БФ*** *в базисе e*. $A_e = (a_{ij}) \in P^{n \times n}$, где $a_{ij} = \mathcal{A}(e_i, e_j)$, $i, j = \overline{1,n}$, – ***матрица БФ*** $\mathcal{A}(x, y)$ *в базисе e*. Общий вид (2) в компактной форме: $\mathcal{A}(x, y) = x_e^T A_e y_e$, $\mathcal{A}(x, y) = y_e^T A_e^T x_e$. **(3)**

Т2. *$\forall$ матрица $A = (a_{ij}) \in P^{n \times n}$ является матрицей единственной БФ в заданном базисе пр–ва.*

Док–во. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – заданный базис V. Матрица $A = (a_{ij}) \in P^{n \times n}$ является матрицей БФ (2). Из Т1 $\Rightarrow$ единственность этой БФ. •

Т3. *Матрицы БФ $\mathcal{A}(x, y)$ в базисах e* и $f = eQ$ *связаны*: $A_f = Q^T A_e Q$.

Док–во. Согласно (3) $\mathcal{A}(x, y) = x_e^T A_e y_e = \{x_e = Qx_f, y_e = Qy_f\} = x_f^T Q^T A_e Q y_f$. И $\mathcal{A}(x, y) = x_f^T A_f y_f \Rightarrow$ т.к. x, y – $\forall$ $\Rightarrow A_f = Q^T A_e Q$ •

С. $\mathrm{rg}\, A_e = \mathrm{rg}\, A_f \Rightarrow$ Все матрицы одной БФ имеют одинаковый ранг.

Т4. *БФ симметрична $\Leftrightarrow$ ее матрица в $\forall$ базисе симметрична.*

Док–во. *Необх–ть* проверяется непосредственно. *Дост–сть*: если $A_e^T = A_e$ то, согласно (3), $\mathcal{A}(x, y) = y_e^T A_e^T x_e = y_e^T A_e x_e = \mathcal{A}(y, x)$ •

Ранг БФ – ранг ее матрицы в $\forall$ базисе. БФ $\mathcal{A}(x, y)$ ***вырожденна***, если $\mathrm{rg}\, \mathcal{A}(x, y) < \dim V$, и ***невырожденна***, если $\mathrm{rg}\, \mathcal{A}(x, y) = \dim V$.

Т5. *$\mathcal{A}(x, y)$ вырождена $\Leftrightarrow$ $\exists$ вектор $x \neq \theta$: $\mathcal{A}(x, y) = 0$, $\forall y \in V$.* **(4)**

Док–во. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис V и $A_e = (a_{ij})$ – матрица БФ $\mathcal{A}(x, y)$ в этом базисе. Соотношение (4) $\Leftrightarrow$ системе $\mathcal{A}(x, e_j) = 0$, $i, j = \overline{1,n}$, $\Leftrightarrow$ (т.к $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$) системе $\sum_{i=1}^n x_i \mathcal{A}(e_i, e_j) = 0$, $i, j = \overline{1,n}$ т.е.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{n1}x_n = 0\\ \qquad \ldots \ldots \ldots \\ a_{1n}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = 0\end{cases} \qquad (5)$$

$\Rightarrow$ БФ $\mathcal{A}(x, y)$ выроždена $\Leftrightarrow$ однородная система (5) имеет нетривиальное решение, т.е. когда $\mathrm{rg}\, A_e < n$. •

Пусть $\mathcal{A}(x, y)$ – симметричная БФ в V над полем P. ***Квадратичной формой*** (КФ) – отображение $\mathcal{A} : V \to P$, которое $\forall x \in V$ ставит в соответствие число $\mathcal{A}(x, x)$. БФ $\mathcal{A}(x, y)$ – ***полярная БФ*** к КФ $\mathcal{A}(x)$.

Т6. *Полярная БФ для $\forall$ КФ определена однозначно.*

Вытекает из того, что если $\mathcal{A}(x, y)$ – полярная БФ для КФ $\mathcal{A}(x, x)$, то для $\forall x, y \in V$ $\mathcal{A}(x, y) = ½\,(\mathcal{A}(x + y, x + y) - \mathcal{A}(x, x) - \mathcal{A}(y, y))$. •

Матрица КФ $\mathcal{A}(x, x)$ *в базисе e* – матрица полярной БФ $\mathcal{A}(x, y)$ в e.

2 квадратные матрицы A и B ***конгруэнтны***, если $\exists$ невырожденная $Q : B = Q^T A\, Q$. 2 квадратные комплексные матрицы A и B ***эрмитово конгруэнтны***, если $\exists$ невырожденная $Q : B = Q^* A\, Q$. Свойства КФ:

1°. Матрица КФ симметрична. 2°. $\forall$ симметрическая матрица является матрицей единственной КФ в заданном базисе.

3°. Матрицы КФ в базисах e и $f = eQ$ связаны : $A_f = Q^T A_e Q$. **(6)**

Т.е. 2 матрицы КФ $\mathcal{A}(x, x)$ в различных базисах конгруэнтны.

4°. В базисе e КФ $\mathcal{A}(x, x)$ с матрицей $A_e = (a_{ij})$: $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

$$\mathcal{A}(x,x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j, \qquad a_{ij} = a_{ji} \qquad (7)$$

или, в компактной форме $\mathcal{A}(x, x) = x_e^T A_e x_e$, $A_e^T = A_e$ **(8)**

(7) или (8) – ***общий вид КФ*** $\mathcal{A}(x, x)$ *в базисе e*.

5°. ***Ранг КФ*** ранг ее матрицы в $\forall$ базисе. $\mathrm{rg}\, \mathcal{A}(x, x) = \mathrm{rg}\, \mathcal{A}(x, y)$. КФ $\mathcal{A}(x, x)$ ***вырожденная***, если $\mathrm{rg}\, \mathcal{A}(x, x) < \dim V$ и ***невырожденной***, если $\mathrm{rg}\, \mathcal{A}(x, x) = \dim V$. Базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$ –***канонический базис КФ*** $\mathcal{A}(x, x)$, если ее матрица в e диагональна: $A_e = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Канонический вид КФ (λ_i – ***канонические коэффициенты***)

$\mathcal{A}(x, x) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2$, $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ **(9)**

Число ненулевых квадратов r = рангу $\mathcal{A}(x, x)$

Т7. *Для $\forall$ КФ $\exists$ канонический базис.*

Док–во. Пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ – базис V. КФ $\mathcal{A}(x, x)$ с $A_e = (a_{ij})$ имеет в этом базисе вид (7). Пусть $g(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$. Переход к базису $f = eQ$ $\Leftrightarrow$ преобразованию координат : $x_e = Qx_f$, $|Q| \neq 0$. Пусть $A_e \neq O$, Δ_k – ее *угловые миноры* k–го порядка : $\Delta_k = M^{1,\ldots,k}_{1,\ldots,k}$, $k = \overline{1,n}$, и $\Delta_0 = 1$.

I. (***метод Лагранжа***) Если $\Delta_k \neq 0$, $k = \overline{1, n-1}$, приведение к каноническому виду за из $n - 1$ шагов.

1–й шаг : $\Delta_1 \neq 0$, т.е. $a_{11} \neq 0$. Соберем все члены КФ $g(x_1, \ldots, x_n)$, содержа–щие x_1, и выделим полный квадрат: $\mathcal{A}(x, x) = g(x_1, \ldots, x_n) =$
$a_{11}x_1^2 + 2\sum_{k=2}^n a_{1k}x_1 x_k + \sum_{i,k=2}^n a_{ik}x_i x_k = a_{11}\left(x_1 + \sum_{k=2}^n \frac{a_{1k}}{a_{11}}x_k\right)^2 -$
$a_{11}\left(\sum_{k=2}^n \frac{a_{1k}}{a_{11}}x_k\right)^2$
$+ \sum_{i,k=2}^n a_{ik}x_i x_k$ Перейдем к : $x_1' = x_1 + \sum_{k=2}^n \frac{a_{1k}}{a_{11}}x_k$ и $x_j' = x_j$ при $j \neq 1$, выполнив при этом преобразование координат с матрицей

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}}\\ 0 & 1 & \ldots & 0\\ & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ КФ $\mathcal{A}(x, x)$ в новых координатах : $\mathcal{A}(x, x) = a_{11}x_1'^2 + h(x_2', \ldots, x_n')$, где $h(x_2', \ldots, x_n')$ – КФ от $x_2', \ldots, x_n'$ $\Rightarrow A_1 = Q^T_1 A_e Q_1$ в новом базисе :

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0\\ 0 & a_{22}' & \ldots & a_{2n}'\\ & & \ldots & \\ 0 & a_{n2}' & \ldots & a_{nn}'\end{bmatrix}$$

$\forall$ строка (столбец) A_1, начиная со 2–й, получена из соответ–щей строки (столбца) A_e вычитанием из нее 1–й строки (столбца) A_e, умноженной на некоторое число $\Rightarrow$ угловые миноры A_1 совпадают с $\Delta_1, \ldots, \Delta_n \Rightarrow \Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_1 = a_{11}\, a'_{22}$ и $a'_{22} = \Delta_2 / \Delta_1 \neq 0$ **(10)**

2–й шаг : $\Delta_2 \neq 0$, т.е. $a_{22} \neq 0$, применяются действия 1–го шага к КФ $h(x_2', \ldots, x_n')$: выделяется полный квадрат среди членов, содержащих x_2, выполняется невырожденное преобразование координат

$$x_2'' = x_2' + \sum_{k=3}^{n} \frac{a_{2k}'}{a_{22}'}x_k' \;\text{ и }\; x_j'' = x_j' \;\text{ при }\; j \neq 2$$

и КФ $\mathcal{A}(x, x)$: $\mathcal{A}(x, x) = a_{11}x_1''^2 + a_{22}'x_2''^2 + v(x_3'', \ldots, x_n'')$, где $v(x_3'', \ldots, x_n'')$ – КФ от переменных $x_3'', \ldots, x_n''$, а ее матрица – к виду

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & a_{22}' & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & a_{33}'' & \ldots & a_{3n}''\\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & a_{n3}'' & \ldots & a_{nn}''\end{bmatrix}$$

Угловые миноры A_2 совпадают с $\Delta_1, \ldots, \Delta_n \Rightarrow a_{33}'' = \Delta_3 / \Delta_2 \neq 0$ **(11)**

Повторяя процесс, за $(n - 1)$ шагов придем к базису, в котором матрица КФ $\mathcal{A}(x, x)$ имеет форму: $A_{n-1} = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где с учетом (10), (11) и $\Delta_0 = 1$: $\lambda_i = \Delta_i / \Delta_{i-1}$ $i = \overline{1,n}$ **(12)**

II. (Модификация метода Лагранжа) Пусть теперь среди $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$ встре-чаютсяся 0-е и после $(i - 1)$–го шага матрица КФ $\mathcal{A}(x, x)$:

$$A_{i-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & O\\ & \ddots & & \\ & & a_{i-1,i-1} & \\ O & & & C\end{bmatrix}, \text{ где } C = \begin{bmatrix} a_{ii} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{ni} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

Пусть $C \neq O$ ($C = O \Rightarrow$ канонический базис уже построен).

1. Если $a_{ii} \neq 0$, то выполним i–й шаг метода Лагранжа.
2. Пусть $a_{ii} = 0$.

а) Если среди диагональных элементов C $\exists$ $a_{jj} \neq 0$, $j > i$, то перену–меруем: $x'_i = x_j$, $x'_j = x_i$ и $x'_k = x_k$ при $k \neq i, j \Rightarrow$ в A_{i-1} поменяются местами строки (столбцы) с номерами i и $j \Rightarrow$ в позиции (i, i) окажется $a'_{ii} = a_{jj} \neq 0 \Rightarrow$ выполним i–й шаг метода Лагранжа.

б) Пусть все диагональные элементы $=0 \Rightarrow$ в ней $\exists$ $a_{kj} \neq 0$, $k, j \ge i$, $k \neq i$ $\Rightarrow$ в КФ от $x_1, \ldots, x_n$ нет квадратов $x_i^2, \ldots, x_n^2$, но есть член вида $2a_{kj}x_k x_j$. Перейдем к новым координатам: $x_k = x'_k + x'_j$, $x_j = x'_k - x'_j$ и $x'_s = x_s$ при $s \neq k, j \Rightarrow$ КФ будет иметь квадраты x'^2_k, x'^2_j $\Rightarrow$ переход к "а". •

Т8. *Если в матрице КФ $\mathcal{A}(x, x)$ ранга r первые r угловых миноров отличны от* 0: $\Delta_k \neq 0$, $k = \overline{1,r}$, *то $\exists$ базис e, в котором матрица КФ имеет диагональный вид* $A_e = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0)$, *где*

$$\lambda_k = \Delta_k / \Delta_{k-1}, \; k = \overline{1,r} \qquad \textbf{(\textit{формулы Якоби})} \quad \textbf{(13)}$$

Док–во. Для КФ $\mathcal{A}(x, x)$ выполнимы 1–ые r шагов метода Лагранжа. После r–го шага матрица A_r КФ :

$$A_r = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & O\\ & \ddots & \\ & & \lambda_r & \\ O & & & C\end{bmatrix}$$

где, согласно (12), $\lambda_k = \Delta_k / \Delta_{k-1}$ $k = \overline{1,r}$, а C – некоторая матрица. Т.к. $\mathrm{rg}\, A_r = r$ и $\lambda_k \neq 0$, $k = \overline{1,r}$, то $\mathrm{rg}\, C = 0$ и $C = O \Rightarrow A_r$ имеет искомый вид. •

43. Закон инерции квадратичных форм.

Пусть V – линейное пр–во над полем P. Отображение $\mathcal{A} : V \times V \to P$ называется ***билинейной формой*** в пр–ве V, если для $\forall x, y, z \in V$, $\alpha \in P$:

1) $\mathcal{A}(x + y, z) = \mathcal{A}(x, z) + \mathcal{A}(y, z)$;
2) $\mathcal{A}(\alpha x, y) = \alpha\, \mathcal{A}(x, y)$;
3) $\mathcal{A}(x, y + z) = \mathcal{A}(x, y) + \mathcal{A}(x, z)$; **(1)**
4) $\mathcal{A}(x, \alpha y) = \alpha \mathcal{A}(x, y)$.

БФ ***симметрична***, если $\mathcal{A}(x, y) = \mathcal{A}(y, x)$, $\forall x, y \in V$.

Пусть $\mathcal{A}(x, y)$ – симметричная БФ в пространстве V над полем P. ***Квадратичной формой*** называется отображение $\mathcal{A} : V \to P$, которое каждому вектору $x \in V$ ставит в соответствие число $\mathcal{A}(x, x)$. БФ $\mathcal{A}(x, y)$ при этом называется ***полярной*** БФ к КФ $\mathcal{A}(x)$. Базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$ называется ***каноническим базисом КФ*** $\mathcal{A}(x, x)$, если ее матрица в этом базисе диагональна: $A_e = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. В каноническом базисе КФ $\mathcal{A}(x, x)$ имеет ***канонический*** вид

$\mathcal{A}(x, x) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$, $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ **(2)**

числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – ее ***канонические коэффициенты***.

Число ненулевых квадратов = рангу $\mathcal{A}(x, x)$. Число π положительных квадратов в (2) и число $\nu = r - \pi$ называются ***положительным*** и ***отрицательным индексами инерции*** КФ $\mathcal{A}(x, x)$, их разность $\sigma = \pi - \nu$ называется ***сигнатурой*** $\mathcal{A}(x, x)$.

Т1 (закон инерции). *Положительный и отрицательный индексы инерции вещественной КФ не зависят от выбора канонического базиса.*

Док–во. Пусть e и f – канонические базисы КФ $\mathcal{A}(x, x)$ ранга r и для $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n y_i f_i$:

$\mathcal{A}(x, x) = a_1 x_1^2 + \ldots + a_p x_p^2 - a_{p+1} x_{p+1}^2 - \ldots - a_r x_r^2$, **(3)**
$\mathcal{A}(x, x) = b_1 y_1^2 + \ldots + b_q y_q^2 - b_{q+1} y_{q+1}^2 - \ldots - b_r y_r^2$,

где a_i, $b_i > 0$, $i = \overline{1,r}$. Докажем, что $p \le q$. Пусть $p > q$. Рассмотрим подпространства $L_1 = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_p)$, $L_2 = \mathcal{L}(f_{q+1}, \ldots, f_n)$. Согласно (*),
$\dim L_1 \cap L_2 = p - (n - q) - \dim (L_1 + L_2)$.
Т.к. $\dim (L_1 + L_2) < n$, $p > q$, то $\dim L_1 \cap L_2 > 0 \Rightarrow$
$\exists\, x_0 \in L_1 \cap L_2$, $x_0 \neq \theta$. Пусть
$x_0 = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_p e_p = \beta_{q+1} f_{q+1} + \ldots + \beta_n f_n \Rightarrow$ из (3)
$\mathcal{A}(x_0, x_0) = a_1\alpha_1^2 + \ldots + a_p\alpha_p^2 = -b_{q+1}\beta_{q+1}^2 - \ldots - b_r\beta_r^2$ **(4)**
Т.к. $x_0 \neq \theta$, то $a_1\alpha_1^2 + \ldots + a_p\alpha_p^2 > 0$,
$-b_{q+1}\beta_{q+1}^2 - \ldots - b_r\beta_r^2 < 0$. Это противоречит (4) $\Rightarrow$ $p < q$. Ан–но показывается, что $q < p \Rightarrow p = q$. •

Пусть $P(\Delta_0, \ldots, \Delta_k)$ и $V(\Delta_0, \ldots, \Delta_k)$ – число совпадений и перемен знаков в последовательности $\Delta_0, \ldots, \Delta_k$.

Т2 (сигнатурое правило Якоби). *Пусть Δ_k – угловой минор k–го порядка матрицы КФ $\mathcal{A}(x, x)$ ранга r и $\Delta_k \neq 0$, $k = \overline{1,r}$. Тогда* $\pi = P(\Delta_0, \ldots, \Delta_r)$, $\nu = V(\Delta_0, \ldots, \Delta_r)$.

Утверждение теоремы вытекает из формул Якоби (5) (**), т.к. $\lambda_i > 0$, если $\mathrm{sgn}\, \Delta_i = \mathrm{sgn}\, \Delta_{i-1}$, и $\lambda_i < 0$, если $\mathrm{sgn}\, \Delta_i \neq \mathrm{sgn}\, \Delta_{i-1}$ •

***:** *Для $\forall$ линейных подпространств L_1 и L_2 линейного пр–ва V*: $\dim (L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim L_1 \cap L_2$

: *Если в матрице КФ $\mathcal{A}(x, x)$ ранга r 1–е r угловых миноров отличны от* 0: $\Delta_k \neq 0$, $k = \overline{1,r}$, *то $\exists$ базис e, в котором матрица КФ имеет диагональный вид* $A_e = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0)$, *где* $\lambda_k = \Delta_k / \Delta_{k-1}$, $k = \overline{1,r}$ **(5)

44. Привидение квадратичной формы к главным осям.

Пусть V – линейное пр–во над полем Р. Отображение $\mathcal{A}: V \times V \to P$ называется ***билинейной формой*** в пр–ве V, если для $\forall\, x, y, z \in V$, $\alpha \in P$:

1) $\mathcal{A}(x + y, z) = \mathcal{A}(x, z) + \mathcal{A}(y, z)$;
2) $\mathcal{A}(\alpha x, y) = \alpha\, \mathcal{A}(x, y)$;
3) $\mathcal{A}(x, y + z) = \mathcal{A}(x, y) + \mathcal{A}(x, z)$; **(1)**
4) $\mathcal{A}(x, \alpha y) = \alpha \mathcal{A}(x, y)$.

БФ ***симметричная***, если $\mathcal{A}(x, y) = \mathcal{A}(y, x)$, $\forall\, x, y \in V$. Пусть $\mathcal{A}(x, y)$ – симметричная БФ в пр–ве V над полем P. ***Квадратичной формой*** называется отображение $\mathcal{A}: V \to P$, которое каждому вектору $x \in V$ ставит в соответствие число $\mathcal{A}(x, x)$. БФ $\mathcal{A}(x, y)$ – ***полярная БФ*** к КФ $\mathcal{A}(x)$. Базис $e = (e_1, ..., e_n)$ – ***канонический базисом КФ*** $\mathcal{A}(x, x)$, если ее матрица в этом базисе диагональна: $A_e = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. В каноническом базисе КФ $\mathcal{A}(x, x)$ имеет ***канонический*** вид

$\mathcal{A}(x, x) = \lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_n x_n^2$, $\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ **(2)**

числа $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – ее ***канонические коэффициенты***.

Число ненулевых квадратов = рангу $\mathcal{A}(x, x)$.

Т1. *Для $\forall$ КФ $\mathcal{A}(x, x)$ в евклидовом пр–ве E $\exists$! симметрический оператор $\mathcal{H} \in \mathcal{L}(E, E)$:*

$$\mathcal{A}(x, x) = (\mathcal{H}x, x), \quad \forall\, x \in E. \quad \textbf{(3)}$$

Док–во. *Существование*. Пусть $e = (e_1, ..., e_n)$ – ОНБ пр–ва E и A_e – матрица КФ $\mathcal{A}(x, x)$ в этом базисе. В силу симметричности матрицы A_e и ортонормир–ованности базиса e $\exists$ симметрический оператор $\mathcal{H} \in \mathcal{L}(E, E)$, который в базисе e имеет матрицу A_e, так что $H_e = A_e$ => для $\forall\, x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, координаты вектора $\mathcal{H}x$ находятся согласно (*): $(\mathcal{H}x)_e = H_e x_e = A_e x_e$ => в силу (**) $(\mathcal{H}x, x) = x_e^T A_e x_e$ => с учетом записи КФ в компактном виде ($\mathcal{A}(x, x) = x_e^T A_e x_e$) получаем (3).

Единственность. Если $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ – симметрические операторы удовлетворяют (3), то $(\mathcal{H}_1 x, x) = (\mathcal{H}_2 x, x)$, $\forall\, x \in E$ => $((\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2) x, x) = 0$, $\forall\, x \in E$. **(4)** => $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ (Оператор $\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2$ симметричен, для него $\exists$ ОНБ из собственных векторов, а все собственные значения в силу (4) = 0) •

Т2. *Для любой КФ в евклидовом пр–ве E существует ОНБ, в котором она имеет канонический вид.*

Док–во. Пусть $\mathcal{H}$ – симметрический оператор, для которого $\mathcal{A}(x, x) = (\mathcal{H}x, x)$, $\forall\, x \in E$. Если $e_1, ..., e_n$ – ОНБ из собственных векторов $\mathcal{H}$, то для $\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ согласно (3) и (**):

$$\mathcal{A}(x, x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i, \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

где $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – собственные значения оператора $\mathcal{H}$, отвечающие собственным векторам $e_1, ..., e_n$. •

Операция построения ОНБ, в котором КФ имеет канонический вид, называется ***приведением квадратичной формы к главным осям***. Из Т2 => $\forall$ *КФ приводится к главным осям.*

З. При док–ве Т2, попутно показано, что канониче–кий базис КФ $\mathcal{A}(x, x)$ совпадает с ОНБ из собственных векторов соответствующего симметрического оператора $\mathcal{H}$, а канонические коэффициенты – с отвечающими им собственными значениями. Собственные значения оператора $\mathcal{H}$ – это корни уравнения $|A_e - \lambda I| = 0$, которые не зависят от $\mathcal{H}$ и инвариантно связаны только с самой КФ. Т.о., при приведении КФ к главным осям *канонические коэффициенты определены однозначно*. Это позволяет находить канонический вид КФ без вычисления канонического базиса.

----

*: *Если $y = \mathcal{A}x$, то $y_f = A_{fe} x_e$*

**: *В евклидовом (унитарном) пр–ве скалярное произведение векторов $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, заданных своими координатами в базисе e, вычисляется по правилу $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$* $\Leftrightarrow$ *e* – ОНБ

45. Одновременное привидение к каноническому виду пары квадратичных форм.

Пусть V – линейное пр–во над полем Р. Отображение $\mathcal{A}: V \times V \to P$ называется ***билинейной формой*** в пр–ве V, если для $\forall\, x, y, z \in V$, $\alpha \in P$:

1) $\mathcal{A}(x + y, z) = \mathcal{A}(x, z) + \mathcal{A}(y, z)$;
2) $\mathcal{A}(\alpha x, y) = \alpha\, \mathcal{A}(x, y)$;
3) $\mathcal{A}(x, y + z) = \mathcal{A}(x, y) + \mathcal{A}(x, z)$; **(1)**
4) $\mathcal{A}(x, \alpha y) = \alpha \mathcal{A}(x, y)$.

БФ ***симметричная***, если $\mathcal{A}(x, y) = \mathcal{A}(y, x)$, $\forall\, x, y \in V$. Пусть $\mathcal{A}(x, y)$ – симметричная БФ в пр–ве V над полем P. ***Квадратичной формой*** называется отображение $\mathcal{A}: V \to P$, которое каждому вектору $x \in V$ ставит в соответствие число $\mathcal{A}(x, x)$. БФ $\mathcal{A}(x, y)$ – ***полярная БФ*** к КФ $\mathcal{A}(x)$. Базис $e = (e_1, ..., e_n)$ – ***канонический базисом КФ*** $\mathcal{A}(x, x)$, если ее матрица в этом базисе диагональна: $A_e = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. В каноническом базисе КФ $\mathcal{A}(x, x)$ имеет ***канонический*** вид

$\mathcal{A}(x, x) = \lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_n x_n^2$, $\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ **(2)**

числа $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – ее ***канонические коэффициенты***.

Число ненулевых квадратов = рангу $\mathcal{A}(x, x)$. КФ $\mathcal{A}(x, x)$ называется ***положительно (отрицательно) определенной***, если $\mathcal{A}(x, x) > 0$ ($\mathcal{A}(x, x) < 0$), $\forall\, x \neq \theta$.

Т1 (о паре КФ). *Для $\forall$ пары КФ $\mathcal{A}(x, x)$ и $\mathcal{B}(x, x)$ в вещественном пр–ве V, одна из которых положи–тельно определена, $\exists$ общий базис, в котором обе КФ имеют канонический вид.*

Док–во. Пусть $\mathcal{B}(x, x) > 0$ и $\mathcal{B}(x, y)$ – БФ, полярная к КФ $\mathcal{B}(x, x)$. В соответствии с Т(*) введем скалярное произведение $(x, y) = \mathcal{A}(x, y)$ $\forall\, x, y \in V$. Тогда пр–во V – евклидово и в нем согласно Т (**) $\exists$ ОНБ $e_1, ..., e_n$, в котором КФ $\mathcal{A}(x, x)$ имеет канонический вид

$$\mathcal{A}(x, x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i, \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

При этом в силу (***) для $\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$$\mathcal{B}(x, x) = (x, x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

***:** *Пусть V – вещественное линейное пр–во. Отобра–жение $\mathcal{A}: V \times V \to \mathbb{R}$ есть скалярное произведение в пр–ве V $\Leftrightarrow$ оно является БФ, полярной к положи–тельно определенной КФ.*

**: *Для $\forall$ КФ в евклидовом пр–ве E существует ОНБ, в котором она имеет канонический вид.*

***: *В евклидовом (унитарном) пр–ве скалярное произведение векторов $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, заданных своими координатами в базисе e, вычисляется по правилу $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$* $\Leftrightarrow$ *e* – ОНБ

46. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

Пусть V – линейное пр–во над полем Р. Отображение $\mathcal{A}: V \times V \to P$ называется ***билинейной формой*** в пр–ве V, если для $\forall\, x, y, z \in V$, $\alpha \in P$:

1) $\mathcal{A}(x + y, z) = \mathcal{A}(x, z) + \mathcal{A}(y, z)$;
2) $\mathcal{A}(\alpha x, y) = \alpha\, \mathcal{A}(x, y)$;
3) $\mathcal{A}(x, y + z) = \mathcal{A}(x, y) + \mathcal{A}(x, z)$; **(1)**
4) $\mathcal{A}(x, \alpha y) = \alpha \mathcal{A}(x, y)$.

БФ ***симметричная***, если $\mathcal{A}(x, y) = \mathcal{A}(y, x)$, $\forall\, x, y \in V$. Пусть $\mathcal{A}(x, y)$ – симметричная БФ в пр–ве V над полем P. ***Квадратичной формой*** называется отображение $\mathcal{A}: V \to P$, которое каждому вектору $x \in V$ ставит в соответствие число $\mathcal{A}(x, x)$. БФ $\mathcal{A}(x, y)$ – ***полярная БФ*** к КФ $\mathcal{A}(x)$. Базис $e = (e_1, ..., e_n)$ – ***канонический базисом КФ*** $\mathcal{A}(x, x)$, если ее матрица в этом базисе диагональна: $A_e = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. В каноническом базисе КФ $\mathcal{A}(x, x)$ имеет ***канонический*** вид

$\mathcal{A}(x, x) = \lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_n x_n^2$, $\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ **(2)**

числа $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – ее ***канонические коэффициенты***.

Число ненулевых квадратов = рангу $\mathcal{A}(x, x)$. Число π положительных квадратов в (2) и число $\nu = r - \pi$ называются ***положительным и отрицательным индексами инерции*** КФ $\mathcal{A}(x, x)$, их разность $\sigma = \pi - \nu$ называется ***сигнатурой*** $\mathcal{A}(x, x)$. КФ $\mathcal{A}(x, x)$ ***положи–тельно (отрицательно) определенная***, если

$\mathcal{A}(x, x) > 0$ ($\mathcal{A}(x, x) < 0$), $\forall\, x \neq \theta$. Такие формы – ***знакоопределенные***. КФ, для которой $\exists$ x и y :

$\mathcal{A}(x, x) > 0$, $\mathcal{A}(y, y) < 0$, – ***знакопеременная***.

Пр. Положительно определенной КФ в вещественном пр–ве является скалярный квадрат в евклидовом пр–ве, т.е. отображение $\mathcal{A}: E \to \mathbb{R}$, определенное равенством $\mathcal{A}(x) = (x, x)$, $\forall x \in E$, т.к. скалярное произведение (x, y) является симметричной БФ (см. аксиомы 1–3 из (*)), а скалярный квадрат – положительно определенной КФ (см. аксиому 4).

Т1. *КФ $\mathcal{A}(x, x)$ положительно (отрицательно) определена $\Leftrightarrow$ ее положительный (отрицательный) индекс инерции совпадает с* dim V.

Док–во. Для $\mathcal{A}(x, x) > 0$. Пусть e – канонический базис КФ $\mathcal{A}(x, x)$ и $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – ее канонические коэф–ты. *Необх–сть*. Если $\mathcal{A}(x, x) > 0$, $\forall\, x \neq \theta$, то и $\mathcal{A}(e_i, e_i) > 0$, $i = \overline{1, n}$. Но $\mathcal{A}(e_i, e_i) = \lambda_i$ => все канонические коэффициенты положительны и $\pi = n$.

Дост–сть. Если $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, то согласно (2)

$\mathcal{A}(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 > 0$, $\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \neq \theta$.

Для док–ва 2–го утверждения рассмотреть КФ $-\mathcal{A}(x, x)$: $\mathcal{A}(x, x) < 0 \Leftrightarrow -\mathcal{A}(x, x) > 0 \Leftrightarrow \nu = \dim V$. •

С. *Определитель матрицы положительно опреде–ленной КФ положителен*, т.к. если e – канонический базис, то в $\forall$ базисе f: $|A_f| = \lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_n \cdot |Q|^2 > 0$ (т.к. матрицы КФ в базисах e и $f = eQ$ связаны $A_f = Q^T A_e Q$

Т2 (критерий Сильвестра). *КФ $\mathcal{A}(x, x)$ положи–тельно (отрицательно) определена $\Leftrightarrow$ угловые миноры Δ_k, $k = \overline{1, n}$, ее матрицы в про–извольном базисе положительны (чередуют знаки, начиная с отрицательного):*

$$\Delta_k > 0,\ k = \overline{1, n} \quad (\Delta_k \Delta_{k-1} < 0,\ k = \overline{1, n})$$

Док–во. 1) *Необх–сть*. Пусть $\mathcal{A}(x, x)$ – положительно определенная КФ, A_e – ее матрица в $\forall$ базисе $e = (e_1, ..., e_n)$. Рассмотрим подпространства $L_k = \mathcal{L}(e_1, ..., e_k)$, $k = \overline{1, n}$, и КФ $\mathcal{A}(x, x)$ на L_k.

$\mathcal{A}(x, x) > 0$, $\forall x \in L_k$, $x \neq \theta$ => ее матрица A_k в базисе $e_1, ..., e_k$ пр–ва L_k имеет положительный определитель $|A_k|$ (следствие). Но $|A_k| = \Delta_k$, $k = \overline{1, n}$, => $\Delta_k > 0$, $k = \overline{1, n}$. *Дост–сть* вытекает из Т(**) и Т1.

2) Для док–ва 2–го утверждения рассмотрим КФ $-\mathcal{A}(x, x)$ с угловыми минорами δ_k. Отрицательная определенность $\mathcal{A}(x, x) \Leftrightarrow$ положительности формы $-\mathcal{A}(x, x)$, т.е. условию $\delta_k > 0$, $k = \overline{1, n}$, или $(-1)^k \Delta_k > 0$, $k = \overline{1, n}$. Т.к. $\Delta_0 = 1 > 0$, то: $\Delta_k \Delta_{k-1} < 0$, $k = \overline{1, n}$. •

Из примера => скалярное произведение в евклидовом пр–ве является БФ, полярной к положительно определенной КФ, такими БФ исчерпываются все скалярные произведения в вещественном пр–ве.

Т3. *Пусть V – вещественное линейное пр–во. Отображение $\mathcal{A}: V \times V \to \mathbb{R}$ есть скалярное произведение в пр–ве V $\Leftrightarrow$ оно является БФ, полярной к положительно определенной КФ.*

Док–во. Необх–сть в примере. *Дост–сть*. Пусть $\mathcal{A}(x, x)$ – БФ, полярная к положительно определенной КФ. Тогда отображение $\mathcal{A}: V \times V \to \mathbb{R}$, определенное правилом: $(x, y) = \mathcal{A}(x, y)$ $\forall\, x, y \in V$ является скалярным произведением, т.к. оно удовлетворяет всем аксиомам (*) скалярного произведения.

----

*: Отображение (,) : $V \times V \to P$ называется ***скалярным произведением***, если оно удовлетворяет аксиомам: для $\forall\, x, y, z \in V$ и $\forall\, \alpha \in P$

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, (в вещественном случае без черты)
2) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ 3) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$
4) $(x, x) \geq 0$ для $\forall\, x \in V$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

**: (сигнатурное правило Якоби). *Пусть Δ_k – угловой минор k–го порядка матрицы КФ $\mathcal{A}(x, x)$ ранга r и $\Delta_k \neq 0$, $k = \overline{1, r}$. Тогда* $\pi = P(\Delta_0, ..., \Delta_k)$, $\nu = V(\Delta_0, ..., \Delta_k)$ где $P(\Delta_0, ..., \Delta_k)$ и $V(\Delta_0, ..., \Delta_k)$ – число совпадений и перемен знаков в последовательности $\Delta_0, ..., \Delta_k$.

47. Общий вид скалярного произведения в конечномерном евклидовом и унитарном пр–твах.

Пусть V – вещественное или комплексное линейное пр–во. Отображение (,) : $V \times V \to P$ называется ***скалярным произведением***, если оно удовлетворяет аксиомам: для $\forall\, x, y, z \in V$ и $\forall\, \alpha \in P$

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, (в вещественном случае без черты)
2) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$
3) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$
4) $(x, x) \geq 0$ для $\forall\, x \in V$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

Вещественное линейное пр–во со скалярным произведением называется ***евклидовым пр–вом E***, комплексное – ***унитарным V***.

Матрицей Грама *системы векторов $a_1, ..., a_n$* евклидова (унитарного) пр–ва называется матрица

$$G(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & \cdots & (a_n, a_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_1, a_n) & \cdots & (a_n, a_n) \end{pmatrix} \quad \textbf{(1)}$$

Определитель матрицы Грама называется ***определителем Грама***. Свойства матрицы Грама:

1. Система векторов $a_1, ..., a_n$ евклидова (унитарного) пр–ва линейно зависима $\Leftrightarrow$ $\det G(a_1, ..., a_n) = 0$
2. Матрица Грама системы векторов евклидова и унитарного пр–ва самосопряженная: эрмитова ($G^H = G$) для унитарного пр–ва, симметрическая ($G^T = G$) для евклидова.
3. Определитель Грама линейно независимой системы векторов в евклидовом (унитарном) пр–ве >0

Пусть $a_1, ..., a_n$ – базис пространства и $x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j a_j$. Тогда скалярное произведение векторов x и y имеет вид

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_i, \sum_{j=1}^{n} y_j a_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \overline{y_j}\left(\sum_{i=1}^{n} (a_j, a_i) x_i\right) = \\ = Y^* G X$$

где $G = G(a_1, ..., a_n)$ – матрица Грама вида (1), $X = (x_1, ..., x_n)^T$, $Y = (y_1, ..., y_n)^T$.

Формула $(x, y) = Y^* G X$ задает ***общий вид скалярного произведения в евклидовом и унитарном пр–вах.***

48. Гиперповерхность 2-го порядка в евклидовом пространстве. Приведенные уравнения.

Пусть $\mathcal{A}(x, x)$ – ненулевая квадратичная форма, $g(x)$ – линейная форма, заданные в евклидовом пр–ве E, c – вещественная константа. Множество векторов $x \in E$:

$$\mathcal{A}(x, x) + 2g(x) + c = 0 \quad \textbf{(1)}$$

называется ***гиперповерхностью 2–го порядка*** *в евкли–довом пр–ве E* (при $\dim E = 2$ это линия 2–го порядка). (1) – *общее уравнение гиперповерхности 2–го порядка.*

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ – базис пр–ва E, $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – матрица КФ $\mathcal{A}(x, x)$ в этом базисе, $b_i = g(e_i)$, $i = \overline{1, n}$, – коэффициенты линейной формы и $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Из представления квадратичной и линейной форм в виде

$$\mathcal{A}(x,x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j \,, a_{ij} = a_{ji}, \quad g(x) = \sum_{i=1}^n b_ix_i$$

(1) можно записать в виде

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^n b_ix_i + c = 0\,, \qquad a_{ij} = a_{ji} \quad \textbf{(2)}$$

или, в компактной форме, при $X = (x_1, \dots, x_n)^T$, $b = (b_1, \dots, b_n)^T$: $\quad X^TAX + 2b^TX + c = 0,\ A^T = A \quad$ **(3)**

Пусть e – ОНБ пр–ва E и пусть в этом базисе урав-нение гиперповерхности имеет вид (2).

1. Приведем КФ $\mathcal{A}(x, x)$ к главным осям, т.е. найдем ОНБ f, в котором КФ $\mathcal{A}(x, x)$ имеет канонический вид: $\mathcal{A}(x, x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$.

Канонические коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ будут при этом определены однозначно. Можно считать, что $\lambda_k \neq 0$ при $k \le r$ (где $r = \operatorname{rg} \mathcal{A}(x, x)$) и $\lambda_k = 0$ при $k > r$.
При переходе от e к базису $f = eQ$ (2) ортогональным преобразованием координат (Т*) преобразуется в

$$\sum_{k=1}^r \lambda_k x_k'^2 + 2\sum_{k=1}^n b_k'x_k' + c = 0 \quad \textbf{(4)}$$

2. Пусть $a \in E$. Отображение $\varphi : E \to E$, определенное равенством $\varphi(x) = x + a$, $\forall x \in E$, называется *пара–ллельным переносом пр–ва E на вектор a.* $\operatorname{im} \varphi = E$.

Если в (4) $\lambda_k \neq 0$ для некоторого k, то $\lambda_k x_k'^2 + 2b_k'x_k' = = \lambda_k(x_k' + b_k'/\lambda_k)^2 - b_k'^2/\lambda_k$. Пусть $x_k'' = x_k' + b_k'/\lambda_k$, => исчезает переменная x_k'' в 1–й степени.

Выполнение таких преобразований для всех $k = \overline{1, r}$ $\Leftrightarrow$ параллельному переносу на вектор с координатами $(b_1'/\lambda_1, \dots, b_r'/\lambda_r, 0, \dots, 0)$ => из (4) получим:

$$\sum_{k=1}^r \lambda_k x_k''^2 + 2\sum_{k=r+1}^n b_k'x_k'' + c' = 0,$$

$$\text{где } c' = c - \sum_{k=1}^r b_k'^2/\lambda_k \quad \textbf{(5)}$$

3. В (5) возможны 2 случая:
а) $b'_{r+1} = \dots = b'_n = 0$; б) $\exists\, b'_k \neq 0,\ k > r$.
В "а" (5) имеет вид $\lambda_1 x_1''^2 + \dots + \lambda_r x_r''^2 + c' = 0$
В "б" выполним еще одно ортогональное преобра–зование координат. Матрица S этого преобразования строится так. Рассмотрим арифметический вектор $(b'_{r+1}, \dots, b'_n) \in \mathbb{R}^{n-r}$. По условию он не 0–ой и его можно нормировать: если $\alpha = (\sum_{k=r+1}^n b_k'^2)^{1/2}$, то вектор $s_1 = (b'_{r+1}/\alpha, \dots, b'_n/\alpha)$ – ортонормированная система из 1 вектора. Дополним этот вектор до ОНБ
$s_1, \dots, s_{n-r}$ пр–ва $\mathbb{R}^{n-r}$. Обозначая $s_i = (s_{i,r+1}, \dots, s_{i\,n})$, $i = \overline{1, n-r}$, искомая матрица S :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & s_{1,r+1} & \dots & s_{1n} \\ & 0 & & & \dots & \\ & & & s_{n-r,r+1} & \dots & s_{n-r,n} \end{bmatrix}$$

Матрица S ортогональна (т.к. ее строки ортонорми–рованы) => преобразование базиса с помощью S приводит к новому ОНБ. Преобразование координат : $x_k''' = x_k''$ при $k = \overline{1, r}$

$$x_{r+1}''' = \alpha^{-1} \sum_{k=r+1}^n b_k'\, x_k''$$

$$x_k''' = \sum_{i=r+1}^n s_{ki}\, x_i'' \ \text{ при } k = \overline{r+2, n}$$

приводит (5) к $\lambda_1 x_1'''^2 + \dots + \lambda_r x_r'''^2 + 2\alpha x_{r+1}''' + c' = 0$
В нем можно освободиться от c', если выполнить параллельный перенос на вектор, у которого все ко-ординаты, кроме $(r + 1)$–й (равной $c' / (2\alpha)$), равны 0.
Итак, с помощью параллельного переноса и перехода к новому ОНБ общее уравнение (2) приводится к 1 из 2 типов ***приведенных уравнений гиперповерхности***:

$$\lambda_1x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 + a_0 = 0, \quad \lambda_1 \dots \lambda_r \neq 0,$$
$$\lambda_1x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 + b_0\, x_{r+1} = 0, \quad \lambda_1 \dots \lambda_r b_0 \neq 0$$

***:** *Матрица ортогональна (унитарна)* $\Leftrightarrow$ *она является матрицей перехода от одного ОНБ к другому ОНБ евклидова (унитарного) пр–ва*

49. Нормированное пр–во. Нормы Гёльдера.

V – линейное пр–во, вещественное или комплексное.
Норма в V – отображение $\|\bullet\| : V \to \mathbb{R}$, ставящее в соответствие $\forall\, x \in V$ число $\|x\| \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющее аксиомам: $\forall\, x, y \in V$ и $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
1) $\|x\| \ge 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;
3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).
Линейное пр–во V с заданной на нем нормой $\|\bullet\|$ называется ***линейным нормированным пр–вом***.
Число $\|x\|$ называется ***нормой вектора x.***
Вещественная ф–я $f(x)$ ***выпукла*** на интервале $I = (a, b)$, если для $\forall\, x, y \in I$ и $\forall$ числа $0 \le t \le 1$:

$$f(tx + (1 - t)\, y) \le t\, f(x) + (1 - t)\, f(y) \quad \textbf{(1)}$$

$g(x)$ ***вогнута*** на I, если $f(x) \equiv - g(x)$ выпукла на I.
Т. *Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема на I и $f''(x)$ – ее 2–я производная. Если $f''(x) > 0$ при всех $x \in I$, то $f(x)$ выпукла на I.*
Док–во. При $x = y$ (1) – равенство. При $t = 0$ или $t = 1$ равенство получается при $\forall\, x, y$. Пусть $a < x < y < b$ и $0 < t < 1$. Тогда для $z = tx + (1 - t)\, y$ имеем $x < z < y$.
По Т Лагранжа, $\exists$ точки ξ и η :

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(\xi), \qquad x < \xi < z,$$
$$\frac{f(y) - f(z)}{y - z} = f'(\eta), \qquad x < \eta < z$$

По Т Лагранжа для некоторой точки ζ получаем

$$\frac{f(y) - f(z)}{y - z} - \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f''(\zeta)(\eta - \xi) \ge 0, \quad \xi < \zeta < \eta$$

Остается учесть, что $t = (y - z) / (y - x)$ и заметить, что левая часть имеет вид

$$\frac{f(x)(y - z) + f(y)(z - x) - f(z)(y - x)}{(y - z)(z - x)} = = \frac{tf(x) + (1 - t)f(y) - f(z)}{(y - z)(z - x)}(y - x)$$

Сл. *Функция* $\ln x$ *является вогнутой.*
Док–во. $(\ln x)'' = -1/x^2 < 0$.
Лемма (неравенство Юнга). *Пусть положительные числа p, q таковы, что* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Тогда*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \qquad \forall a, b \ge 0$$

Док–во. В силу вогнутости логарифма,

$$\ln(ab) \le \frac{\ln a^p}{p} + \frac{\ln b^q}{q} \le \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right)$$

Неравенства Гельдера. *В условиях леммы для $\forall$ комплексных чисел $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_n$ справедливо* :

$$\left|\sum_{i=1}^n x_iy_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{1/q}$$

Док–во. Пусть

$$a = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}, b = \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{1/q}$$

При $a = 0$ или $b = 0$ неравенство очевидно. Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то, используем лемму для $|x_i|/a$, $|y_i|/b$:

$$(|x_i|/a)(|y_i|/b) \le \frac{|x_i|^p a^p}{p} + \frac{|y_i|^q b^q}{q}, \qquad i = 1, \dots, n$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_iy_i|\right)/(ab) \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Неравенство Минковского. *Пусть $p \ge 1$, $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_n$ – произвольные комплексные числа. Тогда*

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{1/p}$$

Док–во. При $p = 1$ неравенство проверяется очевидным образом. В случае $p > 1$имеем

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \le \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1} |x_i + y_i| \le$$
$$\le \sum_{i=1}^n |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i||x_i + y_i|^{p-1}$$

Для каждой суммы справа применим неравенство Гельдера, взяв $q = p/(p - 1)$ => $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \le \left(\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{1/p}\right) \times$$
$$\times \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

Остается заметить, что $(p - 1)q = p$ и $1 - 1/q = 1/p$. •
Пусть $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{C}^n$. При $p \ge 1$ положим

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$$

При фиксированном x

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \max_{1\le i\le n} |x_i| \quad => \quad \|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$$

$\|x\|_p$ – *p–нормы* или ***нормы Гельдера***.
Неравенства Гельдера и Минковского сохраняют силу при $p = \infty$ (в этом случае $q = 1$). Для док–ва достаточно перейти к пределу при $p \to \infty$.
Т. *При любом $p \ge 1$, включая $p = \infty$, величина $\|x\|_p$ является нормой на $\mathbb{C}^n$.*
Док–во. Свойства (1) и (2) нормы очевидны. Неравен–ства треугольника – это неравенство Минковского.

50. Длина вектора. Тождество параллелограмма.

Отображение (,) : $V \times V \to P$ называется ***скалярным произведением***, если оно удовлетворяет аксиомам: для $\forall\, x, y, z \in V$ и $\forall\, \alpha \in P$
1) $(x, x) \ge 0$ для $\forall\, x \in V$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, (в вещественном случае без черты)
3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ 4) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$
Вещественное линейное пр–во со скалярным произ–ведением – ***евклидово***, комплексное – ***унитарное***.
V – линейное пр–во, вещественное или комплексное.
Норма в V – отображение $\|\bullet\| : V \to \mathbb{R}$, ставящее в соответствие $\forall$ вектору $x \in V$ число $\|x\| \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющее аксиомам: $\forall\, x, y \in V$ и $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
1) $\|x\| \ge 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ 2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;
3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).
Линейное пр–во V с заданной на нем нормой $\|\bullet\|$ – ***линейное нормированное пр–во***. Число $\|x\|$ – ***норма вектора x.*** В евклидовом (унитарном) пр–ве норма – длина: $\|x\| = |x|$ Это ***евклидова норма*** : $\|x\|_E = \sqrt{(x, x)}$
Справедливость аксиом нормы вытекает из свойств длины: из аксиом скалярного произведения =>
1°. $\forall$ вектор x евклидова (унитарного) пр–ва имеет длину, при этом $|x| \ge 0$, $\forall x \in E\ (U)$ и $|x| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.
2°. $|\alpha x| = |\alpha||x|$, $\forall x \in E\ (U)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.
3°. Неравенство Коши–Буняковского ($|(x, y)|^2 \le (x, x)\,(y, y)$) в новой терминологии: $|(x, y)| \le |x| \cdot |y|$. Тогда $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + (x, y) + (y, x) \le |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2$

Тождество параллелограмма:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x, y \in V$$

Т. *Норма является евклидовой* $\Leftrightarrow$ *для $\forall$ f и g из нормы выполняется тождество параллелограмма.*
Док–во. 1). Пусть V – пр–во со скалярным произведением. Пусть $(x, y) = a + \boldsymbol{i}b$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда если $\|x\| = |x|$, то

$$\|x + y\|^2 = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2a$$
$$\|x + \boldsymbol{i}y\|^2 = (x, x) + \boldsymbol{i}(x, y) - \boldsymbol{i}(y, x) + (y, y) = = \|x\|^2 + \|\boldsymbol{i}y\|^2 + 2a$$

=> $a = f(x, y)$ и $b = g(x, y)$, где

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2),$$
$$g(x, y) = \frac{1}{2}(\|x + \boldsymbol{i}y\|^2 - \|x\|^2 - \|\boldsymbol{i}y\|^2)$$

2) Пусть V – нормированное пр–во. Если норма порожда–ется скалярным произведением, то оно обязано иметь вид $(x, y) = f(x, y) + \mathbf{i}g(x, y)$ **(1)**
Пусть (1) – определение функции (x, y), докажем, что она обладает всеми св–вами скалярного произведения.
$(x, x) = \|x\|^2$ => 1–я аксиома очевидна. Равенство $f(x, y) = f(y, x)$ очевидно, $g(x, y) = - g(y, x)$ получается с помощью тождества параллелограмма => $(x, y) = \overline{(y, x)}$.
Пусть норма удовлетворяет тождеству параллелограмма, докажем, что функция (x, y) линейна по 1–му аргументу (3–я и 4–я аксиомы). Достаточно доказать линейность $f(x, y)$ по 1–му аргументу (линейность $g(x, y)$ по 1–му аргументу – очевидное следствие). Докажем, что $f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z)$. Из определения f и тождества параллелограмма :

$$f(x, z) = \frac{1}{4}(\|x + z\|^2 - \|x - z\|^2),$$
$$f(y, z) = \frac{1}{4}(\|y + z\|^2 - \|y - z\|^2)$$

Запишем $x + z = u + v$, $y + z = u - v$ => $u = \frac{1}{2}(x + y + 2z)$, $v = \frac{1}{2}(x - y)$. В силу тождества параллелограмма для векторов u и v,

$$\|x + z\|^2 + \|y + z\|^2 = \frac{1}{2}\|(x + y + z) + z\|^2 + \frac{1}{2}\|x - y\|^2$$
$$\|x - z\|^2 + \|y - z\|^2 = \frac{1}{2}\|(x + y - z) - z\|^2 + \frac{1}{2}\|x - y\|^2$$

Из тождества параллелограмма для $x + y + z$ и z

$$\frac{1}{2}\|(x + y + z) + z\|^2 = \|x + y + z\|^2 + \|z\|^2 - \frac{1}{2}\|x + y\|^2$$
$$\frac{1}{2}\|(x + y - z) - z\|^2 = \|x + y - z\|^2 + \|z\|^2 - \frac{1}{2}\|x + y\|^2$$
$$=> \ f(x, z) + f(y, z) = \frac{1}{4}(\|x + y + z\|^2 - \|x + y - z\|^2) = = f(x + y, z)$$

Докажем, что $f(\alpha x, y) = \alpha\, f(x, y)$ для $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$. Пусть $\alpha = \frac{m}{n}$ – рациональное число =>

$$nf\left(\frac{1}{n}x, y\right) = f\left(n\left(\frac{1}{n}x\right), y\right) = f(x, y) \ =>$$
$$f\left(\frac{1}{n}x, y\right) = \frac{1}{n}f(x, y) \ =>$$
$$f\left(\frac{m}{n}x, y\right) = f\left(m\left(\frac{1}{n}x\right), y\right) = mf\left(\frac{1}{n}x, y\right) = \frac{m}{n}f(x, y)$$

Произвольное вещественное α представим как предел последовательности рациональных $\alpha_k \to \alpha$. Функция $f(x, y)$ непрерывна по x. Поэтому в $f(\alpha_k x, y) = \alpha_k\, f(x, y)$ можно перейти к пределу при $k \to \infty$. Т.о., мы доказали равенство $(\alpha x, y) = \alpha\,(x, y)$ для вещественных α. Оно будет верно для любых комплексных α, если мы установим, что $(\mathbf{i}x, y) = \mathbf{i}(x, y)$. Это вытекает из определения (1), вида функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ и тождества параллелограмма. •

51. Эквивалентность норм в конечномерном пр–ве.

V – линейное пр–во, вещественное или комплексное.
Норма в V – отображение $\|\bullet\| : V \to \mathbb{R}$, ставящее в соответствие $\forall$ вектору $x \in V$ число $\|x\| \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющее аксиомам: $\forall\, x, y \in V$ и $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
1) $\|x\| \ge 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ 2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;
3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).
В евклидовом (унитарном) пр–ве норма – длина:
$\|x\| = |x|$ Это ***евклидова норма*** : $\|x\|_E = \sqrt{(x, x)}$ **(1)**
Справедливость аксиом нормы вытекает из свойств длины: из аксиом скалярного произведения =>
1°. $\forall$ вектор x евклидова (унитарного) пр–ва имеет длину, при этом $|x| \ge 0$, $\forall x \in E\ (U)$ и $|x| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.
2°. $|\alpha x| = |\alpha||x|$, $\forall x \in E\ (U)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.
3°. Неравенство Коши–Буняковского ($|(x, y)|^2 \le (x, x)\,(y, y)$) в новой терминологии: $|(x, y)| \le |x| \cdot |y|$.
Тогда $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + (x, y) + (y, x) \le |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2$
Мн–во M называется ***метрическим пр–вом***, если задано отображение $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$, которое каждой упорядо–ченной паре $x, y \in M$ ставит в соответствие $\rho(x, y) \in \mathbb{R}$:
1) $\rho(x, y) \ge 0$, $\forall\, x, y \in M$; $\quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $\forall\, x, y \in M$
3) $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)$ $\forall\, x, y \in M$.
$\rho(x, y)$ – ***расстояние между x и y***; отобр–е ρ – ***метрика***
У1. *В нормированном пр–ве V отображение $\rho: V \times V \to \mathbb{R}$, определенное $\rho(x, y) = \| x - y \|$, $\forall\, x, y \in V$ – метрика.*
Аксиомы метрики вытекают из аксиом нормы. •
Посл–сть векторов $\{x^{(k)}\}$ в нормированном пр–ве V называется ***сходящейся по норме*** к вектору $a \in V$, если $\lim_{k\to\infty}\|x^{(k)} - a\| = 0$, вектор a – ***предел посл–сти*** $\{x^{(k)}\}$ ***по норме*** $\|\bullet\|$: $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = a$
У2. *Сходящаяся по норме последовательность имеет единственный предел.* Док–во из аксиомы треугольника: $\|a - b\| = \|a - x^{(k)} + x^{(k)} - b\| \le \|x^{(k)} - a\| + \|x^{(k)} - b\|$, где a и b – 2 предела $x^{(k)}$. •
Пусть $x_0 \in V$ и $r > 0$. $S(x_0, r) = \{x \in V \mid \|x - x_0\| = r\}$ – ***сфера радиуса r с центром x_0 по норме*** $\|\bullet\|$, множество $B(x_0, r) = \{x \in V \mid \|x - x_0\| \le r\}$ – замкнутый ***шар радиуса r с центром x_0 по норме*** $\|\bullet\|$. Сферы и шары по евклидовой норме : $S_E(x_0, r)$, $B_E(x_0, r)$.
У3. *Из $\forall$ посл–сти векторов $x^{(k)} \in B_E(x_0, r)$ (или $S_E(x_0, r)$) можно выделить подпоследовательность, сходящуюся по норме $\|\cdot\|_E$ к вектору $a \in B_E(x_0, r)$ ($S_E(x_0, r)$).*
Док–во. Пусть $x_0 = \theta$ => сфера $S_E(r) = \{x \in V \mid \|x\|_E = r\}$.
Пусть $e_1, \dots, e_n$ – ОНБ пр–ва V и $x^{(k)} = \sum_{i=1}^n x_i^{(k)}\, e_i \in S_E(r)$

$$=> \ \|x^{(k)}\|_E = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \left|x_i^{(k)}\right|^2\right)} = r$$

=> ограниченность координат векторов $x^{(k)}$ посл–сти. По теореме Больцано–Вейерштрасса из этой посл–сти можно выделить сходящуюся (покоординатно) подпосл–сть $\{x^{(k_m)}\}$. Пусть $x^{(k_m)}$ имеет координаты $x_1^{(k_m)}, \dots, x_n^{(k_m)}$, сходящиеся соответственно к $a_1, \dots, a_n$ и $a = \sum_{i=1}^n a_i\, e_i$ =>

$$\|x^{(k_m)} - a\|_E = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \left|x_i^{(k_m)} - a_i\right|^2\right)} \to 0$$

=> $\{x^{(k_m)}\} \to a$ по евклидовой норме.
Покажем, что $a \in S_E(r)$. В $|\|x\| - \|y\|| \le \|x\| - \|y\|$ положим $x = x^{(k_m)}$, $y = a$ =>

$$\left|\|x^{(k_m)}\|_E - \|a\|_E\right| \le \|x^{(k_m)} - a\|_E => \|x^{(k_m)}\|_E - -\|x^{(k_m)} - a\|_E \le \|a\|_E \le \|x^{(k_m)}\|_E + \|x^{(k_m)} - a\|_E$$

или, т.к. $\|x^{(k_m)} - a\|_E \to 0$:

$$\|x^{(k_m)}\|_E - \varepsilon \le \|a\|_E \le \|x^{(k_m)}\|_E + \varepsilon, \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

если m достаточно велико => $\|a\|_E = r$ и $a \in S_E(r)$. •
2 нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ в линейном пр–ве V называются ***эквивалентными,*** если $\exists$ такие числа $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, что для $\forall\, x \in V$: $\|x\|_1 \le c_1\|x\|_2$, $\quad \|x\|_2 \le c_2\|x\|_1$
Т. *В конечномерном пр–ве $\forall$ 2 нормы эквивалентны.*
Док–во. Выберем в V $\forall$ базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ и введем скалярное произведение $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i\overline{y}_i$ => V – евкли–дово и в нем можно рассматривать евклидову норму (1). Т.к. e – ОНБ, то
$\|x\|_E = |x| = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$. Пока–жем, что $\forall\, \|\bullet\|$ в V эквивалентна евклидовой норме $\|x\|_E$
1. Докажем: $\exists\, c_1 > 0$: для $\forall\, x \in V$ $\|x\| \le c_1\|x\|_E$ **(2)**
Пусть $x \in V$ и $x = \sum_{i=1}^n x_ie_i$. Тогда $\|x\| \le \sum_{i=1}^n |x_i|\|e_i\|$ и из неравенства Коши–Буняковского ($|(x, y)|^2 \le (x, x)\,(y, y)$)

$$\|x\| \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \sum_{i=1}^n \|e_i\|^2\right)^{1/2} = c_1\|x\|_E,$$

$$\text{где } \ c_1 = \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2\right)^{1/2} > 0$$

2. Докажем: $\exists\, c_2 > 0$: для $\forall\, x \in V$ $\|x\|_E \le c_2\|x\|$ **(3)**
а) Пусть мн–во координат всех векторов сферы $S = \{x \in V \mid \|x\| = 1\}$ не ограничено => для $\forall\, m \in \mathbb{N}$ $\exists\, x^{(m)}$: $\|x^{(m)}\| = 1$ и $|x_k^{(m)}| > m$ для некоторого $k \in \{1, \dots, n\}$

$$=> \|x^{(m)}\|_E = \left(\sum_{i=1}^n \left|x_i^{(m)}\right|^2\right)^{1/2} \ge |x_k^{(m)}| > m \quad \textbf{(4)}$$

Рассмотрим посл–сть $y^{(m)} = x^{(m)}/\|x^{(m)}\|_E$ **(5)**
$\|y^{(m)}\|_E = 1$ => $y^{(m)} \in S_E(1)$. По У3 из $\{y^{(m)}\}$ выделить подпосл–сть $\{y^{(m_j)}\}$, сходящуюся по $\|\bullet\|_E$ к $a \in S_E(1)$, т.е.

$$\|y^{(m_j)} - a\|_E \to 0 \quad \textbf{(6)} \quad \|a\|_E = 1 \quad \textbf{(7)}$$

Из (6) с учетом (2) => $\|y^{(m_j)} - a\| \to 0$ **(8)**
=> $\{y^{(m_j)}\}$ сходится к вектору a по норме $\|\bullet\|$.
С другой стороны, в силу (5), (4) с учетом $\|x^{(m_j)}\| = 1$:
$\|y^{(m_j)}\| = \|x^{(m_j)}\| / \|x^{(m_j)}\|_E < 1/m_j$ => $\|y^{(m_j)}\| \to 0$.
Отсюда и из (8) в силу единственности предела => $a = \theta$, что противоречит (7). Т.о., $\exists\, M$: для $\forall\, x = \sum_{i=1}^n x_ie_i \in S$ выполняется неравенство $|x_i| \le M$, $i = \overline{1, n}$ **(9)**
б) Пусть $x = \sum_{i=1}^n x_ie_i$ – $\forall$ вектор пр–ва V, тогда вектор $\frac{x}{\|x\|} \in S$ и для его координат выполняется (9) => $\frac{|x_i|}{\|x\|} \le M$,
$|x_i| \le M\|x\|$, $i = \overline{1, n}$ и $\|x\|_E == \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} \le \le M\sqrt{n}\|x\| = c_2\|x\|$, где $c_2 = M\sqrt{n} > 0$. •
Сл. *В конечномерном пр–ве из сходимости по одной норме следует сходимость по $\forall$ другой норме*, т.к. $\|x^{(k)} - a\|_1 \le c_1\|x^{(k)} - a\|_2$

52. Задача о наилучшем приближении в конечномерном нормированном пространстве.

V – линейное пр–во, вещественное или комплексное. ***Норма*** в V – отображение $\|\bullet\| : V \to \mathbb{R}$, ставящее в соответствие $\forall$ вектору $x \in V$ число $\|x\| \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющее аксиомам: $\forall\, x, y \in V$ и $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ 2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Мн–во M называется ***метрическим пр–вом***, если задано отображение $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$, которое каждой упорядоченной паре элементов $x, y \in M$ ставит в соответствие число $\rho(x, y) \in \mathbb{R}$:
1) $\rho(x, y) \geq 0$, $\forall\, x, y \in M$; $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $\forall\, x, y \in M$
3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)\ \forall\, x, y \in M$.

Посл–сть векторов $\{x^{(k)}\}$ в нормированном пр–ве V называется ***сходящейся по норме*** к вектору $a \in V$, если $\lim_{k\to\infty}\|x^{(k)} - a\| = 0$, вектор a – ***предел*** $\{x^{(k)}\}$ ***по норме*** $\|\bullet\|$: $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = a$ или $x^{(k)} \to a$.

Пусть $x_0 \in V$ и $r > 0$. $S(x_0, r) = \{x \in V \mid \|x - x_0\| = r\}$ – ***сфера радиуса r с центром x_0 по норме*** $\|\bullet\|$,
$B(x_0, r) = \{x \in V \mid \|x - x_0\| \leq r\}$ – замкнутый ***шар радиуса r с центром x_0 по норме*** $\|\bullet\|$

Мн–во S ***ограниченно***, если оно целиком содержится в некотором шаре. Мн–во S ***замкнуто***, если оно содер–жит все свои предельные точки. Мн–во S ***компактно***, если из $\forall$ посл–сти точек $x^k \in S$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $x \in S$. Компактное множество обязано быть замкнутым. Обратное не верно: метрическое пр–во M всегда является замкнутым множеством, но может и не быть компактным. $\forall$ компактное множество S является ограниченным (подпоследовательность неограниченной послед–сти не может быть сходящейся, т.к. не может быть ограниченной).

Вещественная функция $f(x)$, определенная для точек x метрического пр–ва M, называется ***непрерывной*** в $x \in M$, если для $\forall\, \{x^k\} \to x$, посл–сть $f(x^k) \to f(x)$.

Т (Вейерштрасса). *Для $\forall$ вещественной $f(x)$, непре–рывной во всех точках компактного множества S,*
$\exists$ точки x_{min}, $x_{max} \in S : f(x_{min}) < f(x) < f(x_{max})$ для $\forall\, x \in S$

Док–во. Пусть $f(x^k) > k$ для некоторой $\{x^k\} \in S$ => если $x^{k_i} \to x$, то т.к. $f(x)$ непрерывна, $f(x^{k_i}) \to f(x)$, но $f(x^{k_i})$ не может сходиться, т.к. не ограниченна => противоречие => $f(x)$ ограничена сверху. Пусть c_{max} – ТВГ $\{f(x), x \in S\}$ => для $\forall\, k\ \exists$ точка $x^k \in S$: $c_{max} - 1/k \leq f(x^k) \leq c_{max}$. Выберем сходящуюся подпоследовательность $x^{k_i} \to x$ и перейдем в последних неравенствах к пределу => $f(x) = c_{max}$. Ограниченность снизу и существование точки минимума доказывается переходом к $g(x) = -f(x)$. •

Л1. *Для произвольной нормы $\|\bullet\|$ в пр–ве $\mathbb{C}^n$ функция $f(x) = \|x\|$ непрерывна относительно 2–нормы .*

Док–во. Пусть $x^k = [x_1^k, \dots, x_n^k]^T \to x = [x_1, \dots, x_n]^T$. Используя неравенство треугольника для норм:

$$|f(x^k) - f(x)| = |\|x^k\| - \|x\|| \leq \|x^k - x\| \leq$$
$$\leq \sum_{1\leq i\leq n} |x_i^k - x_i| \|e_i\|$$

где $e_i = [0, \dots, 1, \dots, 0]^T$. Правая часть $\to 0$ при $x^k \to x$

$$\|x^k - x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i^k - x_i|^2\right)^{1/2} \to 0 \quad ■$$

Пусть $x \in V$ и L – непустое множество векторов из V. ***Расстояние*** между x и L – величина

$$\gamma = \inf_{z\in L} \|x - z\|$$

Вектор $z_0 \in L$ называется ***элементом наилучшего приближения*** для x на L, если $\gamma = \|x - z_0\|$.

Л2 (о наилучшем приближении). *Пусть L конечномерное подпространство в нормированном пр–ве V. Тогда для $\forall\, x \in V\ \exists$ вектор $z_0 \in L$:*

$$\|x - z_0\| \leq \|x - z\|\ \forall z \in L .$$

Док–во. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $\forall z$ такой, что $\|x - z\| \leq \gamma + \varepsilon$ => $\|z\| \leq R \equiv \gamma + \varepsilon + \|x\|$ => $\gamma = \inf_{z\in L,\ \|z\|\leq R} \|x - z\|$. По Л1 $f(x) = \|x - z\|$ непрерывна на замкнутом шаре $\|z\| \leq R$ конечномерного пр–ва L. По теореме Вейерштрасса, $\gamma = \|x - z_0\|$ для некоторого $z_0 \in L$ (). •

53. ЛО в нормированных пр–вах. Непрерывность и ограниченность. Норма ЛО.

Пусть V и W – линейные пр–ва над общим полем P.

Отображение $\mathcal{A}$: $V \to W$ называется ЛО, ***действующим из пр–ва V в пр–во W***, если для $\forall\, x, y \in V$, $\alpha \in P$: 1) $\mathcal{A}(x + y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y$ 2) $\mathcal{A}(\alpha x) = \alpha\mathcal{A}x$.

Норма в V – отображение $\|\bullet\| : V \to \mathbb{R}$, ставящее в соответствие $\forall$ вектору $x \in V$ число $\|x\| \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющее аксиомам: $\forall\, x, y \in V$ и $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ 2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

V и W – линейные нормированные пр–ва (оба вещественные или комплексные). Норма ЛО в пр–ве $\mathcal{L}(V, W)$ ***согласованна*** с векторными нормами $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_W$ пр–ств V и W, если для $\forall\, \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$:

$$\|\mathcal{A}x\|_W \leq \|\mathcal{A}\| \cdot \|x\|_V,\ \ \forall x \in V$$

Т1. *Собственное значение ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ не превосходит по модулю $\forall$ его согласованную норму.*

Док–во. $\mathcal{A}x = \lambda x$ => для $\forall$ согласованной нормы: $\|\mathcal{A}x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ и $\|\mathcal{A}x\| \leq \|\mathcal{A}\| \cdot \|x\|$ => $|\lambda| \leq \|\mathcal{A}\|$ •

ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ ***непрерывен*** в точке $x \in V$, если для $\forall\, \{x_k\} \in V : x_k \to x$ при $k \to \infty$, послед–сть образов $\mathcal{A}x_k \to \mathcal{A}x$: $\|x_k - x\|_V \to 0$ => $\|\mathcal{A}x_k - \mathcal{A}x\|_W \to 0$

Оператор называется ***непрерывным на V***, если он непрерывен при $\forall\, x \in V$. Оператор называется ***ограни–ченным***, если единичную сферу в V он переводит в ограниченное по норме пр–ва W множество, т.е. если $\exists c > 0$: для $\forall\, x \in V$ ($\|x\| = 1$) выполняется $\|\mathcal{A}x\| \leq c$, или, если $\exists\, c > 0 : \|\mathcal{A}x\|_W \leq c\|x\|_V\ \ \forall x \in V$.

Т2. *В конечномерных нормированных пр–вах V и W $\forall$ ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ ограничен.*

Док–во. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис пр–ва V и $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ => согласно аксиомам нормы и неравенству Коши–Буняковского ($|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$)

$$\|\mathcal{A}x\|_W \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|\mathcal{A}e_i\|_W \leq$$
$$\leq \left(\sum_{i=1}^n \|\mathcal{A}e_i\|_W^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2} = M\|x\|_E,$$
$$\text{где } M = \left(\sum_{i=1}^n \|\mathcal{A}e_i\|_W^2\right)^{1/2}$$

Т.к. в конечномерном пр–ве $\forall$ 2 нормы эквивалентны, то $\exists\, c_2 > 0$: для $\forall\, x \in V$: $\|x\|_E \leq c_2\|x\|_V$ => $\|\mathcal{A}x\|_W \leq c\|x\|_V$, где $c = Mc_2 > 0$. •

Т3. *Для непрерывности ЛО необходима и достаточна его ограниченность.*

Док–во. Дост–сть из неравенства $\|\mathcal{A}x_k - \mathcal{A}x\|_W = \|\mathcal{A}(x_k - x)\|_W \leq c\|x_k - x\|_V$.
Необх–сть. Пусть множество значений нормы $\|\mathcal{A}x\|_W$ на единичной сфере $S = \{x: \|x\|_V = 1\}$ не ограничено => $\exists\, \{x_k\} \in S : \|\mathcal{A}x_k\|_W \to \infty$. Пусть $y_k = x_k/\|\mathcal{A}x_k\|_W$ => $\|y_k\|_V = 1/\|\mathcal{A}x_k\|_W \to 0$ => $\|\mathcal{A}y_k\|_W \to 0$. Это невозможно, т.к. $\|\mathcal{A}y_k\|_W = 1$ для $\forall\, k$ => $\exists\, c > 0$: $\|\mathcal{A}x\|_W \leq c\ \ \forall x \in S$ => $\|\mathcal{A}x\|_W \leq c\|x\|_V\ \ \forall x \in S$ ■

Пусть V, W – конечномерные пр–ва и $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$.

Из Т2 => ограниченность $\mathcal{A}$ => $\exists\, c > 0 : \|\mathcal{A}x\|_W \leq$ $\leq c\|x\|_V\ \ \forall x \in V \Leftrightarrow \|\mathcal{A}x\|_W/\|x\|_V \leq c\ \ \forall x \neq \theta$ => числовое $\left\{\frac{\|\mathcal{A}x\|_W}{\|x\|_V} \middle| \forall x \neq \theta\right\}$ ограничено сверху => для него $\exists$ ТВГ. Положим

$$\mu(\mathcal{A}) = \sup_{x\neq\theta} \frac{\|\mathcal{A}x\|_W}{\|x\|_V} \quad (\mathbf{1})$$

Т4. *Отображение $\mu(\mathcal{A})$ – норма в пр–ве $\mathcal{L}(V, W)$.*

Док–во. $\mu(\mathcal{A}) \geq 0$ для $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, и равенство $\mu(\mathcal{A}) = 0$ означает: $\|\mathcal{A}x\|_W = 0\ \ \forall x \in V$, т.е. $\mathcal{A}x = \theta$, или $\mathcal{A} = \mathcal{O}$. Аксиомы 2 и 3 вытекают из свойств ТВГ. •

Норма $\mu(\mathcal{A})$ называется ***нормой*** оператора $\mathcal{A}$, ***подчиненной*** векторным нормам пространств V и W:

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_{x\neq\theta} \frac{\|\mathcal{A}x\|_W}{\|x\|_V} = \sup_{\|x\|_V=1} \|\mathcal{A}x\|_W$$

Свойства подчиненной нормы.
1. Согласованность: $\|\mathcal{A}x\|_W \leq \|\mathcal{A}\| \cdot \|x\|_V\ \ \forall x \in V$, т.к., согласно (1), $\|\mathcal{A}x\|_W/\|x\|_V \leq \mu(\mathcal{A}) = \|\mathcal{A}\|$
2. Она – наименьшая из всех согласованных норм.
3. Мультипликативность, т.е. $\|\mathcal{A}\mathcal{B}\| \leq \|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\|$, т.к.

$$\|\mathcal{A}\mathcal{B}\| = \sup_{\|x\|=1} \|\mathcal{A}\mathcal{B}x\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}x\| =$$
$$= \|\mathcal{A}\| \sup_{\|x\|=1} \|\mathcal{B}x\| = \|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\|$$

Пусть V, W – евклидовы (унитарные) пр–ва. Норма ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, порожденная евклидовыми нормами вектора, называется ***спектральной нормой*** :

$$\|\mathcal{A}\|_2 = \sup_{\|x\|_E=1} \|\mathcal{A}x\|_E = \sup_{(x,x)=1} \sqrt{(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x)}$$

Сингулярные числа оператора $\mathcal{A}$ – квадратные корни из собственных значений оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$.

Т5. *Спектральная норма оператора равна максимальному сингулярному числу этого оператора.*

Док–во. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – ОНБ из собственных векторов оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$, а $\rho_1, \dots, \rho_n$ – сингулярные числа $\mathcal{A}$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $\rho_k = \max_{1\leq i\leq n} \rho_i$ =>

$$\|\mathcal{A}x\|_E^2 = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (\mathcal{A}^*\mathcal{A}x, x) =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^n \rho_i^2 x_i e_i, \sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \rho_i^2 |x_i|^2 \leq \rho_k^2 \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

=> $\|\mathcal{A}x\|_E \leq \rho_k$, если $\|x\|_E = 1$, и $\|\mathcal{A}x\|_E = \rho_k$, если $x = e_k$ ($\|e_k\|_E = 1$) =>

$$\rho_k = \max_{\|x\|_E=1} \|\mathcal{A}x\|_E = \sup_{\|x\|_E=1} \|\mathcal{A}x\|_E = \|\mathcal{A}\|_2 \quad ■$$

С1. *Спектральная норма нормального оператора равна абсолютному значению максимального по модулю собственного значения этого оператора.*

Т6. *Сингулярные числа ЛО в евклидовом (унитарном) пр–ве не изменяются при умножении оператора на ортогональный (унитарный) оператор.*

Док–во. Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{U}\mathcal{A}\mathcal{V}$, где $\mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathcal{I}$, $\mathcal{V}^*\mathcal{V} = \mathcal{I}$ => $\mathcal{B}^*\mathcal{B} = \mathcal{V}^*\mathcal{A}^*\mathcal{A}\mathcal{V}$ => матрицы операторов $\mathcal{B}^*\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ подобны и их собственные значения совпадают.

С2. *Спектральная норма ЛО не изменяется при умножении оператора на ортогональный (унитарный) оператор.*

54. Матричные нормы. Унитарно инвариантные н–ы.

Норма в V – отображение $\|\bullet\| : V \to \mathbb{R}$, ставящее в соответствие $\forall$ вектору $x \in V$ число $\|x\| \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющее аксиомам: $\forall\, x, y \in V$ и $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ 2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Норма $\|\mathcal{A}\|$ называется ***нормой*** оператора $\mathcal{A}$, ***подчиненной*** векторным нормам пространств V и W:

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_{x\neq\theta} \frac{\|\mathcal{A}x\|_W}{\|x\|_V} = \sup_{\|x\|_V=1} \|\mathcal{A}x\|_W$$

Пусть каждой комплексной матрице A поставлено в соответствие число $f(A) \geq 0$ такое, что:
1) $f(A)$ является нормой на $\mathbb{C}^{m\times n}$ для всех m, n;
2) $f(AB) \leq f(A)f(B)$ для $\forall$ матриц A и B, допускающих умножение. Тогда $f(A)$ называется ***матричной нормой.***

У1. *Пусть для $\forall\, n$ задана векторная норма на $\mathbb{C}^n$, и пусть для $\forall\, m, n$ и $\forall$матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ норма $\|A\|$ определена как операторная норма, порожденная данными вектор–ными нормами. Тогда $\|A\|$ является матричной нормой.*

Док–во. Пусть $\|x\|_*$ – векторная норма для $x \in \mathbb{C}^n$ при $\forall\, n$. Для $\forall$ матриц A и B, допускающих умножение, $\exists\, x_0$ единичной нормы такой : $\|AB\| = \|ABx_0\|_* \leq$

$$\leq \|A\| \cdot \|Bx_0\|_* \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x_0\|_* = \|A\| \cdot \|B\| \quad ■$$

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_m)$ – базисы пр–тв V и W. Введем в V и W векторную норму $\|\cdot\|_p$ как норму Гёльдера одинакового типа:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}, \text{где } p = 1,2,\infty \quad (\mathbf{1})$$

Пусть $\|\mathcal{A}\|_p$ – норма, подчиненная векторным нормам $\|\cdot\|_p$, $A = (a_{ij})$ – матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисах e и f.

Т1. *Для $\forall$ ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$*

$$\|\mathcal{A}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

Док–во. Пусть $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ =>

$$\mathcal{A}x = \sum_{j=1}^n x_j \mathcal{A}e_j = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right) f_i$$

Согласно (1)

$$\|\mathcal{A}x\|_1 = \sum_{i=1}^m \left|\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right| \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j| =$$
$$= \sum_{j=1}^n |x_j| \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \quad (\mathbf{2})$$

Пусть у k–й столбца A максимальная столбцовая сумма:

$$\sum_{i=1}^m |a_{ik}| = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

$$\text{из (2) => } \|\mathcal{A}x\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \sum_{i=1}^m |a_{ik}| = \|x\|_1 \sum_{i=1}^m |a_{ik}|$$

$$=> \begin{cases} \|\mathcal{A}x\|_1 \leq \sum_{i=1}^m |a_{ik}|, \forall x: \|x\|_1 = 1 \\ \|\mathcal{A}x\|_1 = \sum_{i=1}^m |a_{ik}|,\ x = e_k\ (\|e_k\|_1 = 1) \end{cases} =>$$

$$=> \sum_{i=1}^m |a_{ik}| = \sup_{\|x\|_1=1} \|\mathcal{A}x\|_1 \quad ■$$

Т2. *Для $\forall$ ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$*

$$\|\mathcal{A}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Док–во ан–но Т1.

Евклидовой нормой (или ***нормой Фробениуса***) матрицы $A = (a_{ij})$ размера $m\times n$ называется число

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

У2. *Норма Фробениуса является матричной нормой.*

Док–во. Для $\forall\, m, n$ норма Фробениуса является нормой на линейном пр–ве $\mathbb{C}^{m\times n}$(как 2–норма на пр–ве $\mathbb{C}^{mn}$ изомор–фном $\mathbb{C}^{m\times n}$). Пусть $a_1, \dots, a_n$ – столбцы A, а $b_1^T, \dots, b_n^T$ – строки B => $AB = a_1 b_1^T + \dots + a_n b_n^T$. Из неравенства треугольника, равенства $\|a_i b_i^T\|_F = \|a_i\|_F \|b_i\|_F$ и неравенства Коши–Буняковского($|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$):

$$\|AB\|_F \leq \sum_{i=1}^n \|a_i b_i^T\|_F = \sum_{i=1}^n \|a_i\|_F \|b_i\|_F$$
$$\leq \left(\sum_{i=1}^n \|a_i\|_F^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \|b_i\|_F^2\right)^{1/2} = \|A\|_F \|B\|_F \quad ■$$

Ограниченный ЛО $\mathcal{A} : V \to V$ со св–вом $\|\mathcal{A}x\| = \|x\|$ $\forall x \in V$ называется ***изометрическим*** или ***сохраняющим норму***. Пусть в $\mathbb{C}^n$ задана какая–то норма, а матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (как ЛО из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$) ее сохраняет. Такая матрица называется ***изометрической*** относительно данной нормы.

У3. *Множество всех комплексных $n \times n$–матриц, изометрических относительно гельдеровской 2–нормы, совпадает с множеством унитарных матриц порядка n.*

Док–во. 2–норма порождается естественным скалярным произведением в $\mathbb{C}^n$. Из исследований, связанных с тождеством параллелограмма => сохранение длин влечет за собой сохранение скалярных произведений:
$(Ax, Ay) = (x, y) \Leftrightarrow y^*(A^*A)x = y^*x\ \ \forall x, y \in \mathbb{C}^n$ => $y^*(A^*A - I)x = 0$ для $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$. Если x и y – векторы стандартного базиса => все элементы матрицы $A^*A - I$ равны 0 => сохранение 2–нормы $\Leftrightarrow$ условию $A^*A = I$, определяющем унитарную матрицу. •

Матричная норма $\|\bullet\|$ ***унитарно инвариантна***, если $\|PAQ\| = \|A\|$ для $\forall$ матрицы A и $\forall$ унитарных матриц P и Q, допускающих умножение.

У4. *Норма Фробениуса является унитарно инвариантной.*

Док–во. Q – унитарная матрица и $A = [a_1, \dots, a_n]$ => из У3:

$$\|Qa_j\|_2 = \|a_j\|_2, j = \overline{1,n} \quad =>$$
$$\|QA\|_F^2 = \sum_{j=1}^n \|Qa_j\|_2^2 = \sum_{j=1}^n \|a_j\|_2^2 = \|A\|_F^2 \quad ■$$

Спектральная норма матрицы – матричная норма, подчиненная гельдеровской 2–норме:

$$\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$$

У5. *Спектральн. норма матрицы унитарно инвариантна.*

Док–во. Q – унитарная матрица и $A = [a_1, \dots, a_n]$. По опр.

$$\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|(QA)x\|_2 = \|QA\|_2$$
$$\|AQ\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|(AQ)x\|_2 = \sup_{\|Q^*x\|_2=1} \|(AQ)(Q^*x)\|_2 =$$
$$= \sup_{\|x\|_2=1} \|(Ax)\|_2 = \|A\|_2 \quad ■$$

55. Сингулярное разложение матрицы и обобщенное решение.

Пусть $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Тогда $A^*A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – эрмитова неотрицательно определенная матрица:

$$(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A,$$
$$xA^*Ax = (Ax, Ax) = |Ax|^2 \geq 0\ \ \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

=> все ее собственные значения ≥ 0. Неотрицательные квадратные корни из собственных значений матрицы A^*A называются ***сингулярными числами*** матрицы A. Сингулярные числа $\sigma_i = \sigma_i(A)$ нумеруют по невозрастанию: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0$. Пусть A имеет r ненулевых сингулярных чисел. Пусть $u_1, \dots, u_n$ – ОНБ из собственных векторов матрицы A^*A : $A^*Au_i = \begin{cases} \sigma_i^2 u_i, & 1 \leq i \leq r \\ 0, & r+1 \leq i \leq n \end{cases}$

Положим $v_i = Au_i/\sigma_i$, $1 \leq i \leq r$ => $(v_i, v_j) = 0$ при $i \neq j$ и $(v_i, v_i) = 1$. Дополним систему $v_1, \dots, v_r$ векто–рами $v_r, \dots, v_m$ до ОНБ в $\mathbb{C}^m$. Заметим : при $j \geq r + 1$

$$A^*Au_j = 0 \ => \ u_j^*A^*Au_j = 0 \ => (Au_j)^*(Au_j) = 0$$
$$=> |Au_j| = 0 \ => \ Au_j = 0$$

В итоге:

$$A[u_1, \dots, u_n] = [v_1, \dots, v_m]\begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{bmatrix} \ => \ AU = V\Sigma$$

где $U = [u_1, \dots, u_n]$ и $V = [v_1, \dots, v_m]$ – унитарные матрицы, а Σ – диагональная прямоугольная матрица тех же размеров, что и A. Столбцы матриц U и V образуют ***сингулярные базисы*** матрицы A. Столбцы U – *правые сингулярные векторы* матрицы A, столбцы V – *левые*. Связь между сингулярными векторами и ненулевыми сингулярными числами :
$Au_i = \sigma_i v_i$, $A^*v_i = \sigma_i u_i$, $1 \leq i \leq r$
И $Au_i = 0$, $r+1 \leq i \leq n$, $A^*v_i = 0$, $r+1 \leq i \leq m$
=> для $\forall$ *матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ имеет место равенство* $AU = V\Sigma$ **(1)** *для некоторых унитарных матриц* $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $V \in \mathbb{C}^{m\times m}$ и диагональной *прямоугольной матрицы размеров $m \times n$ с числами $\sigma_i \geq 0$ при $i = j$.*

Сингулярное разложение матрицы: $A = V\Sigma U^*$ **(2)**.

Если получено разложение (2) с унитарными U и V, то $A^*A = U(\Sigma^*\Sigma)U^*$ => если Σ – диагональная прямо–гольная матрица с неотрицательными элементами, то ее ненулевые элементы определены однозначно.

Если $m = n$, то (2) : $A = (V\Sigma V^*)(VU^*) = HQ$, где $H = V\Sigma V^*$ неотрицательно определенная (=> также эрмитова) матрица, а $Q = VU^*$ унитарная матрица (как произведение унитарных матриц). Представление A в виде $A = HQ$ с неотрицательно определенной H и унитарной Q называется ее ***полярным разложением***.

Выводы из сингулярного разложения:
1) *Число ненулевых сингулярных чисел r = рангу A.*
2) *Сингулярное разложение сопряженной матрицы*:

$$A^* = U\Sigma V^*.$$

3) $\mathrm{im}\, A = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_r)$, $\ker A = \mathcal{L}(u_{r+1}, \dots, u_n)$.
4) $\mathrm{im}\, A^* = \mathcal{L}(u_1, \dots, u_r)$, $\ker A^* = \mathcal{L}(v_{r+1}, \dots, v_m)$.
Следствие : $\mathbb{C}^n = \ker A \oplus \mathrm{im}\, A^*$, $\mathbb{C}^m = \ker A^* \oplus \mathrm{im}\, A$

5) $A = \sum_{k=1}^r \sigma_k v_k u_k^*$, $\quad A^* = \sum_{k=1}^r \sigma_k u_k v_k^*$

6) *Если $m = u = r$ (матрица A невырожденная), то*

$$A = \sum_{k=1}^n \sigma_k v_k u_k^*, \qquad A^* = \sum_{k=1}^n \sigma_k u_k v_k^*$$

7) *Пусть $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n$ – сингулярные числа невырож–денной A => $\sigma_1^{-1} \geq \dots \geq \sigma_n^{-1}$ –сингулярные числа A^{-1} .*

8) $\|A\|_2 = \sigma_1$, $\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}$
Спектральная и фробениусова нормы унитарно инвариантны => $\|A\|_2 = \|\Sigma\|_2$, $\|A\|_F = \|\Sigma\|_F$. Очевидно, $\|\Sigma x\|_2 \leq \sigma_1\|x\|_2$, равенство достигается, если x имеет 1 в 1–й позиции и 0 в остальных. Ясно, что $\|\Sigma\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}$ •

У1. *Решение системы $Ax = b$ с невырожденной .матрицей A имеет вид*

$$x = \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{\sigma_k} u_k,$$

где $\beta_k = v_k^* b = (v_k, b)$ *– коэффициенты разложения вектора b по сингулярным векторам $v_1, \dots, v_n$.*

Док–во. Выражение для x получается из св–ва 6. Если $b = \beta_1 v_1 + \cdots \beta_n v_n$, то $(b, v_k) = \beta_k(v_k, v_k) = \beta_k$ (вследствие ортонормированности системы $v_1, \dots, v_n$) •

Если система $Ax = b$ несовместна, то $Ax = b$ не выпол–няется ни для одного вектора x => интересуются такими x, при которых вектор $b - Ax$ (*невязка* для x) имеет минимально возможную длину. Вектор x называется ***псевдорешением*** системы $Ax = b$, если

$$\|b - Ax\|_2 = \min_z \|b - Az\|_2$$

В методе определения "обобщенного решения" в вещественном случае речь идет о наименьшем значении суммы квадратов

$$\|b - Az\|_2^2 = \sum_{i=1}^m (b_i - a_{i1}x_1 - \dots - a_{in}x_1)^2$$

У2. *Пусть A – матрица размеров $m \times n$ и ранга r. Множество псевдорешений системы $Ax = b$ есть линейное многообразие размерности $n - r$*

Док–во. Пусть h – перпендикуляр, опущенный из вектора b на подпространство $\mathrm{im}\, A$, $y \in \mathrm{im}\, A$ –соответствующая ортогональная проекция => система $Az = y$ совместна, и если z – ее произвольное решение, то $|h| = |b - Az| < |b - Ax|$ для $\forall\, x$: $Ax \neq y$ => множество псевдорешений совпадает с множеством решений совместной системы $Az = y$. •

Среди всех псевдорешений выделяется псевдорешение x минимальной длины, т.е. ***нормальное псевдоре–шение***. Геометрически x – перпендикуляр, опущенный на $\ker A$ из $\forall$ частного решения z совместной системы $Az = y$ (вектор y – ортогональная проекция вектора b на $\mathrm{im}\, A$) => $\exists$! *нормальное псевдорешение*. Из сингулярного разложения => явный вид нормального псевдорешения:

$$\hat{x} = \sum_{k=1}^r \frac{v_k^* b}{\sigma_k} u_k$$

Для док–ва проверить, что $b - A\hat{x} \perp \mathrm{im}\, A$ и $\hat{x} \perp \ker A$.

56. Вариационные (экстремальные) свойства собственных значений самосопряженного оператора (матрицы).

Пусть $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор в евклидовом (унитарном) пр–ве V. Построим в V ОНБ $e_1, \dots, e_n$ **(1)** из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, отвечающих собственным значениям $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$.

Норма – евклидова $\|\bullet\|_E$ => если $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, то

$$\|x\|_E = \sqrt{(x,x)} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$

T1. *Для самосопряженного оператора* $\mathcal{A}$

$$\lambda_1 = \max_{\|x\|=1}(\mathcal{A}x, x), \quad \lambda_n = \min_{\|x\|=1}(\mathcal{A}x, x)$$

Док–во. Для $\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in V : \mathcal{A}x = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i \in V$ => т.к (1) – ОНБ, то $(\mathcal{A}x, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i|^2$.

Т.к. $\lambda_1 > \dots > \lambda_n$, то $\lambda_1 > (\mathcal{A}x, x) > \lambda_n$, если $\|x\| = 1$; причем $(\mathcal{A}e_1, e_1) = \lambda_1$, $(\mathcal{A}e_n, e_n) = \lambda_n$ и $\|e_1\| = 1$, $\|e_n\| = 1$ => λ_1 и λ_n – наибольшее и наименьшее значения $(\mathcal{A}x, x)$ на единичной евклидовой сфере. •

З. Т1 дает экстремальные свойства КФ в евклидовом (унитар–ном) пр–ве: *на единичной сфере КФ* $\mathcal{A}(x,x)$ *принимает экстремальные значения на тех векторах, которые являются собственными векторами самосопряженного оператора* $\mathcal{H}$ (Т: *Для* $\forall$ *КФ* $\mathcal{A}(x, x)$ *в евклидовом пр–ве* E $\exists$! *симметрический оператор* $\mathcal{H} \in \mathcal{L}(E, E)$: $\mathcal{A}(x, x) = (\mathcal{H}x, x), \forall x \in E$.).

T2. *Если* L *– линейная оболочка собственных векторов* $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$ $(i_1 < \dots < i_k)$ *из* (1) *самосопряженного оператора* $\mathcal{A}$, *то*

$$\lambda_{i_1} = \max_{\|x\|=1, x\in L}(\mathcal{A}x, x), \quad \lambda_{i_k} = \min_{\|x\|=1, x\in L}(\mathcal{A}x, x) \qquad \mathbf{(2)}$$

Док–во ан–но док–ву Т1. •

Т3 (Куранта–Фишера). *Для собственных значений самосопряженного оператора* $\mathcal{A}$ *справедливо*

$$\lambda_k = \max_{L_k} \min_{\|x\|=1, x\in L}(\mathcal{A}x, x) \quad \mathbf{(3)}$$

где максимум берется по всевозможным k*–мерным подпространствам* L_k *пр–ва* V.

Док–во. Пусть L_k – произвольное k–мерное подпространство и W_{n-k+1} – линейная оболочка собственных векторов $e_k, \dots, e_n$ из (1) оператора $\mathcal{A}$.

Т.к. $\dim L_k + \dim W_{n-k+1} = n+1$, то $L_k \cap W_{n-k+1} \neq \{\theta\}$. Пусть $x_0 \in L_k \cap W_{n-k+1}$ и $\|x_0\| = 1$ => согласно (2) $\mathcal{A}(x_0, x_0) < \lambda_k$ =>

$$\min_{\|x\|=1, x\in L}(\mathcal{A}x_0, x_0) \le \lambda_k =>$$

$$\max_{L_k} \min_{\|x\|=1, x\in L}(\mathcal{A}x_0, x_0) \le \lambda_k$$

Равенство в (3) достигается для $L_k = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_k)$. •

Изложение от Тыртышникова.

Для эрмитовой матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ как функция от векторов $x \in \mathbb{C}^n$ рассматривается *отношение Рэлея*

$$\Phi_A(x) = \frac{x^*Ax}{x^*x}, \qquad x \neq 0$$

Л. *В* $\forall$ *подпространстве* $L \subset \mathbb{C}^n$ $\exists$ *векторы* $x_{min}(L)$ *и* $x_{max}(L)$, *принадлежащие* L :

$$\Phi_A(x_{min}) \le \Phi_A(x) \le \Phi_A(x_{max}), \forall x \in L, x \neq 0$$

Док–во. Функция $\Phi_A(x)$ непрерывна на единичной сфере $\|x\|_2 = 1$ конечномерного пр–ва L. По теореме Вейерштрасса, она принимает там наименьшее и наибольшее значение в каких–то точках x_{min} и x_{max}. Они являются искомыми. •

Т Куранта–Фишера. *Собственные значения* $\lambda_1(A) > \dots > \lambda_n(A)$ *эрмитовой матрицы* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *связаны с отношением Рэлея* $\Phi_A(x)$ *следующим образом:*

$$\lambda_k(A) = \max_{\dim L=k} \min_{x\in L, x\neq 0} \Phi_A(x)$$

$$= \min_{\dim L=n-k+1} \max_{x\in L, x\neq 0} \Phi_A(x) \quad \mathbf{(4)}$$

Док–во. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – ОНБ из собственных векторов матрицы A: $Ae_i = \lambda_i e_i$, $1 < i < n$.

Пусть $L_k = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_k)$ и $x = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i \in L_k, x \neq 0$ =>

$$\Phi_A(x) = \frac{\lambda_1|x_1|^2 + \dots + \lambda_k|x_k|^2}{|x_1|^2 + \dots + |x_k|^2} \ge \lambda_k,$$

$$\Phi_A(e_k) = \lambda_k \quad => \quad \min_{x\in L_k, x\neq 0} \Phi_A(x) = \lambda_k$$

Рассмотрим подпространство $M_k = \mathcal{L}(e_k, \dots, e_n)$ размерности $n - k + 1$. Пусть $x = \sum_{i=k}^{n} x_i e_i \in M_k, x \neq 0$

$$=> \Phi_A(x) = \frac{\lambda_k|x_k|^2 + \dots + \lambda_n|x_n|^2}{|x_k|^2 + \dots + |x_n|^2} \le \lambda_k,$$

$$\Phi_A(e_k) = \lambda_k \quad => \quad \max_{x\in M_k, x\neq 0} \Phi_A(x) = \lambda_k$$

Пусть L – произвольное подпространство размерности k. Т.к. $\dim L + \dim M_k = n+1$, то $\exists\, z \in L \cap M_k$, $z \neq \theta$. =>

$$\min_{x\in L, x\neq 0} \Phi_A(x) \le \Phi_A(z) \le \max_{x\in M_k, x\neq 0} \Phi_A(x) = \lambda_k$$

=> 1–е из (4) доказано. Чтобы получить 2–е, возьмем $\forall$ подпр–во L: $\dim L = n - k + 1$ => $\exists\, z \in L \cap L_k$, $z \neq \theta$

$$=> \max_{x\in L, x\neq 0} \Phi_A(x) \ge \Phi_A(z) \ge \min_{x\in L_k, x\neq 0} \Phi_A(x) = \lambda_k$$

----

*(Вейерштрасса):*Для* $\forall$ *вещественной функции* $f(x)$, *непрерывной во всех точках компактного множества* S, $\exists$ *точки* x_{min} , $x_{max} \in S : f(x_{min}) < f(x) < f(x_{max})$ *для всех* $x \in S$

57. Вариационные (экстремальные) свойства сингулярных чисел.

Арифметические значения квадратных корней из собственных значений матрицы A^*A называются ***сингулярными числами*** матрицы A.

Т. *Пусть* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *имеет сингулярные числа* $\sigma_1(A) \ge \dots \ge \sigma_{\min(m,n)}(A)$. *Тогда при всех* $1 \le k \le \min(m, n)$

$$\sigma_k(A) = \max_{\dim L=k} \min_{x\in L, x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} =$$

$$= \min_{\dim L=n-k+1} \max_{x\in L, x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

Док–во. Заметим, что $\sigma_k(A) = \sqrt{\lambda_k(A^*A)}$. Очевидно

$$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{\frac{x^*(A^*A)x}{x^*x}}, \qquad x \neq 0$$

=> все следует из вариационных свойств собственных значений эрмитовой матрицы A^*A. (см. ниже)•

Для эрмитовой матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ как функция от векторов $x \in \mathbb{C}^n$ рассматривается *отношение Рэлея*

$$\Phi_A(x) = \frac{x^*Ax}{x^*x}, \qquad x \neq 0$$

Л. *В* $\forall$ *подпространстве* $L \subset \mathbb{C}^n$ $\exists$ *векторы* $x_{min}(L)$ *и* $x_{max}(L)$, *принадлежащие* L : $\Phi_A(x_{min}) \le \Phi_A(x) \le \Phi_A(x_{max}), \forall x \in L, x \neq 0$

Док–во. Функция $\Phi_A(x)$ непрерывна на единичной сфере $\|x\|_2 = 1$ конечномерного пр–ва L. По Т (*), она принимает там наименьшее и наибольшее значение в каких–то точках x_{min} и x_{max}. Они искомые. •

Т Куранта–Фишера. *Собственные значения* $\lambda_1(A) > \dots > \lambda_n(A)$ *эрмитовой матрицы* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *связаны с отношением Рэлея* $\Phi_A(x)$ *следующим образом:*

$$\lambda_k(A) = \max_{\dim L=k} \min_{x\in L, x\neq 0} \Phi_A(x)$$

$$= \min_{\dim L=n-k+1} \max_{x\in L, x\neq 0} \Phi_A(x) \quad \mathbf{(4)}$$

Док–во. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – ОНБ из собственных векторов матрицы A: $Ae_i = \lambda_i e_i$, $1 < i < n$.

Пусть $L_k = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_k)$ и $x = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i \in L_k, x \neq 0$ =>

$$\Phi_A(x) = \frac{\lambda_1|x_1|^2 + \dots + \lambda_k|x_k|^2}{|x_1|^2 + \dots + |x_k|^2} \ge \lambda_k,$$

$$\Phi_A(e_k) = \lambda_k \quad => \quad \min_{x\in L_k, x\neq 0} \Phi_A(x) = \lambda_k$$

Рассмотрим подпространство $M_k = \mathcal{L}(e_k, \dots, e_n)$ размерности $n - k + 1$. Пусть $x = \sum_{i=k}^{n} x_i e_i \in M_k, x \neq 0$

$$=> \Phi_A(x) = \frac{\lambda_k|x_k|^2 + \dots + \lambda_n|x_n|^2}{|x_k|^2 + \dots + |x_n|^2} \le \lambda_k,$$

$$\Phi_A(e_k) = \lambda_k \quad => \quad \max_{x\in M_k, x\neq 0} \Phi_A(x) = \lambda_k$$

Пусть L – произвольное подпространство размерности k. Т.к. $\dim L + \dim M_k = n+1$, то $\exists\, z \in L \cap M_k$, $z \neq \theta$. =>

$$\min_{x\in L, x\neq 0} \Phi_A(x) \le \Phi_A(z) \le \max_{x\in M_k, x\neq 0} \Phi_A(x) = \lambda_k$$

=> 1–е из (4) доказано. Чтобы получить 2–е, возьмем $\forall$ подпр–во L: $\dim L = n - k + 1$ => $\exists\, z \in L \cap L_k$, $z \neq \theta$

$$=> \max_{x\in L, x\neq 0} \Phi_A(x) \ge \Phi_A(z) \ge \min_{x\in L_k, x\neq 0} \Phi_A(x) = \lambda_k$$

*(Вейерштрасса):*Для* $\forall$ *вещественной функции* $f(x)$, *непрерывной во всех точках компактного множества* S, $\exists$ *точки* x_{min} , $x_{max} \in S : f(x_{min}) < f(x) < f(x_{max})$ *для всех* $x \in S$

58. Соотношения разделения собственных значений и сингулярных чисел матриц и подматриц.

Эрмитова матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ описана в блочном виде

$$A = \begin{bmatrix} B & u \\ u^* & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}, \; u \in \mathbb{C}^{n-1} \quad \mathbf{(1)}$$

=> подматрица B тоже эрмитова. Пусть $\mu_1 \ge \dots \ge \mu_{n-1}$ – ее собственные значение и Q – унитарная матрица порядка $n - 1$, приводящая ее к диагональному виду

$$Q^*BQ = \begin{bmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} \end{bmatrix} => \begin{bmatrix} Q^* & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & u \\ u^* & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mu_1 & & & s_1 \\ & \ddots & & \\ & & \mu_{n-1} & s_{n-1} \\ \overline{s_1} & \dots & \overline{s}_{n-1} & s_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} s_1 \\ \dots \\ s_{n-1} \end{bmatrix} = Q^*u, s_n = \overline{s_n} = a_{nn}$$

Характеристический многочлен матрицы A:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} \mu_1 - \lambda & & & s_1 \\ & \ddots & & \\ & & \mu_{n-1} - \lambda & s_{n-1} \\ \overline{s_1} & \dots & \overline{s}_{n-1} & s_n - \lambda \end{bmatrix} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1}(\mu_i - \lambda)\left(s_n - \lambda - \frac{|s_1|^2}{\mu_1 - \lambda} - \dots - \frac{|s_{n-1}|^2}{\mu_{n-1} - \lambda}\right)$$

=> если собственное значение λ матрицы A не совпадает ни с одним из собственных значений $\mu_1, \dots, \mu_{n-1}$ подматрицы B, то оно удовлетворяет уравнению

$$\lambda = F(\lambda) \equiv s_n + \frac{|s_1|^2}{\lambda - \mu_1} + \dots + \frac{|s_{n-1}|^2}{\lambda - \mu_{n-1}}$$

У. *Пусть эрмитова матрица* A *порядка* n *с собствен–ными значениями* $\lambda_1 \ge \dots \ge \lambda_n$ *имеет блочное разбие–ние* (1), *в котором* B *– ее эрмитова подматрица порядка* $n - 1$ *с собственными значениями* $\mu_1 \ge \dots \ge \mu_{n-1}$. *Тогда если* $\mu_1 > \dots > \mu_{n-1}$ *и* $s_i \neq 0$, $1 \le i \le n - 1$, *то имеют место соотношения разделения*

$$\lambda_1 > \mu_1 > \lambda_2 > \mu_2 > \dots > \lambda_{n-1} > \mu_{n-1} > \lambda_n \qquad \mathbf{(2)}$$

Док–во. Рассмотрим график функции $y = F(\lambda)$. $F(\lambda)$ не определено при $\lambda = \mu_k$. Т.к. $F(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to \mu_k$, $F(\lambda)$ при $\lambda = \mu_k$ обращается в бесконечность. Изучим поведение $F(\lambda)$ на каждом из n интервалов $I_n = (-\infty, \mu_{n-1})$, $I_n = (\mu_{n-1}, \mu_{n-2})$, …, $I_2 = (\mu_2, \mu_1)$, $I_1 = (\mu_1, +\infty)$.

Пусть $\lambda \in I_k$, $2 \le k \le n - 1$ =>

$$\frac{|s_k|^2}{\lambda - \mu_k} + \frac{|s_{k-1}|^2}{\lambda - \mu_{k-1}} \to \begin{cases} +\infty & \text{при} \;\; \lambda \to \mu_k \\ -\infty & \text{при} \;\; \lambda \to \mu_{k-1} \end{cases}$$

а остальные слагаемые в $F(\lambda)$ являются ограниченными => $F(\lambda) \to \begin{cases} +\infty & \text{при} \;\; \lambda \to \mu_k \\ -\infty & \text{при} \;\; \lambda \to \mu_{k-1} \end{cases}$

Т.к. $F(\lambda)$ – непрерывна, то прямая $y = \lambda$ имеет при $\lambda \in I_k$ точку пересечения с графиком функции $y = F(\lambda)$. Случаи $\lambda \in I_1$ и $\lambda \in I_n$ рассматриваются ан–но => уравнение $F(\lambda) = \lambda$ имеет n различных корней. Ни один из них не совпадает ни с одним из чисел μ_k => каждый из них является собственным значением A. •

Т. *Пусть эрмитова матрица* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *имеет собственные значения* $\lambda_1 \ge \dots \ge \lambda_n$ *и* $B \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ *– ее эрмитова подматрица в блочном разбиении вида* (1), *имеющая собственные значения* $\mu_1 \ge \dots \ge \mu_{n-1}$. *Тогда имеют место соотношения разделения*

$$\lambda_1 \ge \mu_1 \ge \lambda_2 \ge \mu_2 \ge \dots \ge \lambda_{n-1} \ge \mu_{n-1} \ge \lambda_n$$

Док–во. Пусть M – подпространство векторов $x = [x_1, \dots, x_n]^T$, определяемое уравнением $x_n = 0$. Пусть отображение $v : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$ задается : $v(x) = [x_1, \dots, x_{n-1}]$ => если $x \in M$, то $\Phi_A(x) = \Phi_B(v(x))$.

Пусть $1 \le k \le n - 1$. По Т Куранта– Фишера:

$$\lambda_k = \max_{\dim L=k} \min_{x\in L, x\neq 0} \Phi_A(x) \ge$$

$$\ge \max_{\dim L=k, \; L\subset M} \min_{x\in L, x\neq 0} \Phi_A(x) =$$

$$= \max_{\dim L=k, \; L\subset M} \min_{x\in L, x\neq 0} \Phi_B(v(x)) =$$

$$= \max_{\dim L=k, \; L\subset \mathbb{C}^{n-1}} \min_{y\in L, y\neq 0} \Phi_B(y) = \mu_k$$

Пусть теперь $2 \le k \le n$. По Т Куранта– Фишера:

$$\lambda_k = \min_{\dim L=n-k+1} \max_{x\in L, x\neq 0} \Phi_A(x) =$$

$$\le \min_{\dim L=n-k+1, \; L\subset M} \max_{x\in L, x\neq 0} \Phi_A(x) =$$

$$= \min_{\dim L=n-k+1, \; L\subset M} \max_{x\in L, x\neq 0} \Phi_B(v(x)) =$$

$$= \min_{\substack{\dim L=(n-1)-(k-1)+1, \\ L\subset \mathbb{C}^{n-1}}} \max_{y\in L, y\neq 0} \Phi_B(y) = \mu_{k-1} \blacksquare$$

Т. *Пусть* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *и* $B \in \mathbb{C}^{m\times(n-1)}$ *– подматрица, состоящая из первых* $n - 1$ *столбцов матрицы* A. *Тогда для сингулярных чисел* A *и* B *имеют место соотношения разделения*

$$\sigma_1(A) \ge \sigma_1(B) \ge \sigma_2(A) \ge \dots \ge \sigma_{n-1}(B) \ge \sigma_n(A)$$

Док–во. A имеет вид $A = [B, v]$, где v – ее последний столбец => $A^*A = \begin{bmatrix} B^* \\ v^* \end{bmatrix}[B \;\; v] = \begin{bmatrix} B^*B & B^*v \\ v^*B & v^*v \end{bmatrix}$

Искомые неравенства получаются из соотношений разделения для эрмитовой матрицы A^*A порядка n и ее ведущей подматрицы B^*B порядка $n - 1$.

----

*: **Т Куранта–Фишера**. *Собственные значения* $\lambda_1(A) > \dots > \lambda_n(A)$ *эрмитовой матрицы* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *связаны с отношением Рэлея* $\Phi_A(x)$:

$$\lambda_k(A) = \max_{\dim L=k} \min_{x\in L, x\neq 0} \Phi_A(x) =$$

$$= \min_{\dim L=n-k+1} \max_{x\in L, x\neq 0} \Phi_A(x) \text{, где } \Phi_A(x) = \frac{x^*Ax}{x^*x}, \quad x \neq 0$$